SMPC **Université Hassan II Casablanca** Année: *2016/2017*

Examen : Algèbre II

Exercice 1 (5.5 points)

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x + y = z = t = 0\}$$

1. Vérifier que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. (1 pts)
2. Donner une base et la dimension de F. (1 pts)
3. On considère le sous espace vectoriel G de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$G = \{(a, a + b, -a + c, c) \text{ tel que } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

   Donner une base et la dimension de G. (1.5 pts)
4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$. (1 pts)
5. En déduire que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$. (1 pts)

Exercice 2 (14.5 points)

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longrightarrow & (2y + z, -x + y + z, 2y + z) \end{array}$$

1. Vérifier que f est une application linéaire. (1 pts)
2. Déterminer le noyau de f. f est-elle injective? (1 pts)
3. Donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. (1 pts)
4. Vérifier que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $Im\, f$. (1.5 pts)

   Soit $u_1 = e_1 - e_2 + 2e_3$, $u_2 = 2e_1 + 2e_3$ et $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

5. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. (1 pts)
6. Exprimer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ dans la base $\mathcal{B}'$. (1 pts)
7. En déduire la matrice $T = Mat(f, \mathcal{B}')$. (0.5 pts)
8. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. (0.5 pts)
9. Calculer son inverse P^{-1}. (1.5 pts)
10. Donner une relation entre P, T et A. (0.5 pts)
11. Montrer que $T = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N à déterminer. (1 pts)
12. Calculer N^2. En déduire N^n pour tout $n \geq 2$. (1 pts)
13. Calculer T^n pour tout $n \geq 1$. (1.5 pts)
14. En déduire A^n pour tout $n \geq 1$. (1.5 pts)

Exercice I :

1) $Soit\ u = (x, y, z, t) \in F$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y \in \mathbb{R} \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$u = (-y, y, 0,0) = y(-1,1,0,0) = yu_1$$
$$F = Vect\{u_1\}\ avec\ u_1 = (-1,1,0,0)$$
$$\Rightarrow donc\ F\ est\ une\ sev\ de\ \mathbb{R}^4$$

2) $F = Vect\{u_1\}$ $\Rightarrow$ *donc* u_1 est une base de F
et la dimension de $F = 1$

3) $G = Vect\{u_2, u_3, u_4\}$

$$avec \begin{cases} u_2 = (1,1,-1,0) \\ u_3 = (0,1,0,0) \\ u_4 = (0,0,1,1) \end{cases}$$

$Soit\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$
$tq:\ \alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_3 + \alpha_3 u_4 = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

puisque la famille $\{u_2, u_3, u_4\}$ *est libre et génératrice à la fois,*
Alors que la famile $\{u_2, u_3, u_4\}$ *est une base de G*
d'ou dimension de $G = 3$

4) $Soit\ u = (x, y, z, t) \in F \cap G$
et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$
$tq:\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 + 0 + 0 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 0 = 0 \\ 0 - \alpha_2 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_4 = \alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_3 = 0$$

$$donc\ u = 0_{\mathbb{R}^4}$$
$$alors\ G \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$$

5) $On\ a \begin{cases} dim\ F + dim\ G = 1 + 3 = 4 = dim\ \mathbb{R}^4 \\ et\ \ G \cap F = \{0_{\mathbb{R}^4}\} \end{cases}$

$$\Rightarrow F \oplus G = \mathbb{R}^4$$

Exercice II :

1) *Soit* $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$

$f(\lambda u + v) = f(\lambda x + x';\ \lambda y + y';\ \lambda z + z')$

$\Rightarrow 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z')\ ;\ -(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z')\ ;\ 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z')$

$\Rightarrow 2\lambda y + 2y' + \lambda z + z'\ ;\ -\lambda x - x' + \lambda y + y' + \lambda z + z'\ ;\ 2\lambda y + 2y' + \lambda z + z'$

$\Rightarrow \lambda(2y + z) + (2y' + z')\ ;\ \lambda(-x + y + z) + (-x' + y' + z')\ ;\ \lambda(2y + z) + (2y' + z')$

$\Rightarrow \lambda\,(2y + z\ ;\ -x + y + z\ ;\ 2y + z) + (2y' + z'\ ;\ -x' + y' + z'\ ;\ 2y' + z')$

$\Rightarrow \lambda\, f(u) + f(v)$

$\Rightarrow$ *donc* f *est linèaire*

2) *Soit* $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$u \in \ker f \iff f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$u \in \ker f \Rightarrow \begin{cases} 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -2y \\ x = y + z \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} z = -2y \\ z = -y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\Rightarrow u = (-y, y, -2y)$
$\Rightarrow u = y(-1, 1, -2)$
$\Rightarrow u = yu_1$

donc $\Rightarrow \ker f = Vect\,\{u_1\} = Vect\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow \ker f \neq 0$ *donc* f *n'est pas injective*

3) *On prend la base canonique* $B = (e_1, e_2, e_3)$

$f(e_1) = f(1,0,0) = (0, -1, 0)$
$f(e_2) = f(0,1,0) = (2,1,2)$
$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,1,1)$

$$\Rightarrow A_{(f,B)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

4) *Théorème de Rang*

on a $\quad Dim\,\mathbb{R}^3 = dim\ \ker f + rang\, f$

$3 = 1 + rang\, f$

$\Rightarrow$ *Rang* $f = 2$

$\Rightarrow$ *donc demension de* $Im\, f = 2$

et on a $\quad f(e_2) - f(e_1) = 2f(e_3)$

$f(e_1), f(e_2)$ *est libre*

$\Rightarrow$ *d'ou* $f(e_1), f(e_2)$ *est une base de* Imf

5) $Card(B') = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

$$det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \textit{donc } B' \textit{est une base de } \mathbb{R}^3$$

6)

$$\begin{cases} f(u_1) = f(1,-1,2) = (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ f(u_2) = f(2,0,2) = (2,0,2) = u_2 \\ f(u_3) = f(1,1,1) = (3,1,3) = (2,0,2) + (1,1,1) = u_1 + u_3 \end{cases}$$

7)

$$\Rightarrow T_{(f,B')} = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}$$

8)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 - L_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow 1/2\ L_2 - L_2$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10)

$$T = P^{-1} A\, P \quad et \quad A = P\, T\, P^{-1}$$

11)

$$T = D + N$$

$$N = T - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12)

$$N^2 = N.N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$de\ ce\ fait\ N^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \forall n \geq 2$$

13)

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \geq 1$$

14)

$$A^n = P\ T^n\, P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3/2 & -1/2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} - n & -\frac{1}{2} + n & -1 + n \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2n & 2n & -1 + 2n \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 - 2n & 2n & -1 + 2n \end{pmatrix} \quad \forall n \geq 1$$