SERIE 4 (Correction)

Exercice 1. On considère les matrices suivants:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2, AB, $A^\top$, $B^\top$, $BB^\top$:

- $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.
- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 15 \end{pmatrix}$
- $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
- $B^\top = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
- $BB^\top = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$

Exercice 2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $A^2 + A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$.

b) Comme $A^2 + A = 2I_2$ donc $A(A + I_2) = 2I_2$ et $A[\frac{1}{2}(A + I_2)] = I_2$, donc il existe une matrice $B = \frac{1}{2}(A + I_2)$ telle que $AB = I_2$, ce qui implique que A est inversible et son inverse A^{-1} est donné par $A^{-1} = B = \frac{1}{2}(A + I_2)$.

c) $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $n = 0$, on a $M^0 = a_0 M + b_0 I_3$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
Pour $n = 1$, on a $M^1 = a_1 M + b_1 I_3$ avec $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
Pour $n = 2$, on a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = a_2 M + b_2 I_3$ avec $a_2 = 1$ et $b_2 = 2$.
Supposons que la propriété est vraie pour n et on montre qu'elle est aussi vrai pour $n + 1$.
On a $M^{n+1} = M^n M = (a_n M + b_n I_3)M = a_n M^2 + b_n M = a_n(M + 2I_3) + b_n M = (a_n + b_n)M + 2a_n I_3 = a_{n+1}M + b_{n+1}I_3$ avec $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$.
Or $a_{n+1} = a_n + b_n = a_n + 2a_{n-1}$ son equation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$ qui admet deux racines réel $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$. Par suite la suite a_n apour solution $a_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n$. Or comme $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ on trouve que $k_1 = -\frac{1}{3}$ et $k_2 = \frac{1}{3}$ ce qui donne $a_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n$ et $b_n = 2a_{n-1} = -\frac{2}{3}(-1)^{n-1} + \frac{2}{3}2^{n-1}$.

Exercice 4. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on considère les applications linéaires f et g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (x + z, 2y - z, x)$$

$$g(e_1) = e_1 + e_3, \;\; (e_1) = 2e_2 - e_3, \;\; g(e_1) = e_1,$$

a) Les matrice $\mathcal{M}_f$ et $\mathcal{M}_g$ de f et g dans la base B sont

$$\mathcal{M}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{M}_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) On a

$$\begin{cases} h(e_1) &= 2f(e_1) - g(e_1) = e_1 + e_3 \\ h(e_1) &= 2f(e_2) - g(e_2) = 2e_1 + e_3 \\ h(e_1) &= 2f(e_3) - g(e_3) = e_1 - 2e_2 \end{cases}$$

c) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors $h(x, y, z) = h(xe_1 + ye_2 + ze_3)$ comme h est une application linéaire

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= h(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xh(e_1) + yh(e_2) + zh(e_3) \\ &= x(e_1 + e_3) + y(2e_1 + e_3) + z(e_1 - 2e_2) \\ &= (x, 0, x) + (2y, 0, y) + (z, -2z, 0) \\ &= (x + 2y + z, -2z, x + y) \end{aligned}$$

Donc $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) = (x + 2y + z, -2z, x + y)$.

d) On a

$$\mathcal{M}_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ a valeur dans $\mathbb{R}^3$, donc pour montrer que f est bijectif il suffit de montrer qu'elle est injective.
   On a

$$f(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + z &= 0 \\ z &= -2y \\ y - 4y &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

   Donc f est injective et par suite f est bijective.
   Soient $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = (x', y', z')$ ce qui implique

$$f(x, y, z) = (x', y', z') \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + z &= x' \\ 2y + z &= y' \\ y + 2z &= z' \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x + z &= x' \\ 2y + z &= y' \\ 3z &= -y' + 2z' \end{cases}$$

   Donc $z = -\frac{1}{3}y' + \frac{2}{3}z'$ par suite $y = \frac{1}{2}(y' - z) = \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z'$ et $x = \frac{1}{2}(x' - z) = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{6}y' - \frac{1}{3}z'$.
   Par conséquent

$$f^{-1}(x, y, z) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y - \frac{1}{3}z, \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z, -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z).$$

2. On pose $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2 - e_3$ et $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

a) On a $Card(B) = 3 = dim\mathbb{R}^3$, donc B est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi B est libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = 0$ donc $\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(1,1,-1) + \lambda_3(1,1,1) = 0$ ce qui implique que

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

B' est libre, par conséquent B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) On a $f(e'_1) = f(e_1) = 2e_1 = 2e'_1$
$f(e'_2) = f(e_1 + e_2 - e_3) = f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + e_3 - e_1 - e_2 - 2e_3 = e_1 + e_2 - e_3 = e'_2$
$f(e'_3) = f(e_1 + e_2 + e_3) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_1 + e_2 + 2e_3 = 3(e_1 + e_2 + e_3) = 3e'_3$
Donc

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c) La matrice de passage de la base B à la base B' est

$$P(B, B') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) On a $A = \mathcal{M}_B(f) = P(B, B')\mathcal{M}_{B'}(f)P(B', B)$ donc

$$\begin{array}{rcl} A^n & = & PA'^nP^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}$$

On calcule l'inverse de P en résolvant le système linéaire $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,
donc on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + y + z & = & x' \\ y + z & = & y' \\ -y + z & = & z' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x + y + z & = & x' \\ y + z & = & y' \\ 2z & = & y' + z' \end{array}\right.$$

ce qui implique que $z = \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}z'$
$y = -z + y' = \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z'$
et $x = -y - z + x' = x' - y'$ donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Par suite

$$\begin{array}{rcl} A^n & = & PA'^nP^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} A^n & = & PA'^nP^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 3^n \\ 0 & 1 & 3^n \\ 0 & -1 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

par conséquent

$$\begin{array}{rcl} A^n & = & PA'^nP^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} 2^n & -2^n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{array}$$

Exercice 6. Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ et $B = (e'_1, e'_2, e'_3)$ les familles définies par

$$e_1 = (-1, -1, 3), e_2 = (-4, -4, 4), e_3 = (-1, -2, 4)$$

$$e'_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3, e'_2 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, e'_1 = 3e_1 + e_2 + 2e_3$$

1. Comme B et B' sont deux familles de cardinal 3, pour montrer qu'elles sont des bases de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer qu'elles sont libres dans $\mathbb{R}^3$.
2. La matrice de passage $Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ est définie par

$$Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = Pass^{-1}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Or

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1 + 2e_2 + 3e_3 & = & e'_1 \\ 2e_1 + 3e_2 + e_3 & = & e'_2 \\ 3e_1 + e_2 + 2e_3 & = & e'_3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} e_1 + 2e_2 + 3e_3 & = & e'_1 \\ -e_2 - 5e_3 & = & e'_2 - 2e'_1 \\ -5e_2 - 7e_3 & = & e'_3 - 3e'_1 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} e_1 + 2e_2 + 3e_3 & = & e'_1 \\ -e_2 - 5e_3 & = & e'_2 - 2e'_1 \\ 18e_3 & = & e'_3 + 7e'_1 - 5e'_2 \end{array}\right.$$

ce qui implique que $e_3 = \frac{7}{18}e'_1 - \frac{5}{18}e'_2 + \frac{1}{18}e'_3$,
$e_2 = -5e_3 - e'_2 + 2e'_1 = \frac{1}{18}e'_1 + \frac{7}{18}e'_2 - \frac{5}{18}e'_1$ et
$e_1 = -2e_2 - 3e_3 + e'_1 = -\frac{5}{18}e'_1 + \frac{1}{18}e'_2 + \frac{7}{18}e'_1$. Par conséquent

$$Pass(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} \\ \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. 1. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tels que $AX = Y$ donc

$$\begin{array}{rcl} AX = Y & \Longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ & \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 & = & y_1 \\ 3x_1 + 5x_2 & = & y_2 \end{array}\right. \\ & \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} x_1 + 2x_2 & = & y_1 \\ -x_2 & = & y_2 - 3y_1 \end{array}\right. \\ & \Longrightarrow & \left\{\begin{array}{lcl} x_2 & = & 3y_1 - y_2 \\ x_1 & = & -2x_2 + y_1 = -5y_1 + 2y_2 \end{array}\right. \end{array}$$

Par suite

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. De même soient oient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tels que $BX = Y$ donc

$$
\begin{aligned}
BX = Y \quad & \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
& \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & y_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & y_2 \\ 2x_1 + 8x_2 + 10x_3 & = & y_3 \end{array} \right. \\
& \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & y_1 \\ 4x_2 + 8x_3 & = & y_2 + y_1 \\ 12x_2 + 20x_3 & = & y_3 + 2y_1 \end{array} \right. \\
& \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & y_1 \\ 4x_2 + 8x_3 & = & y_2 + y_1 \\ -4x_3 & = & y_3 - 3y_2 - y_1 \end{array} \right. \\
& \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_3 & = & \frac{1}{4}y_1 + \frac{3}{4}y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ x_2 & = & -2x_3 + y_2 + y_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_1 & = & 2x_2 + 5x_3 - y_1 = \frac{5}{4}y_1 + \frac{11}{4}y_2 - \frac{1}{4}y_3 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Par suite

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{11}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}
$$

Par conséquent $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{11}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Sur $\mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ on considère les endomorphismes f et g

$$f(x, y, z, t) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + t), \quad \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$$

$$g(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y + z + t, z + t, t)$$

1. $\mathcal{M}(f)_B$, $\mathcal{M}(g)_B$:
   On a

$$
\left\{ \begin{array}{l} f(e_1) = (1,1,1,1) \\ f(e_2) = (0,1,1,1) \\ f(e_3) = (0,0,1,1) \\ f(e_4) = (0,0,0,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \mathcal{M}(f)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\left\{ \begin{array}{l} g(e_1) = (1,0,0,0) \\ g(e_2) = (1,1,0,0) \\ g(e_3) = (1,1,1,0) \\ g(e_4) = (1,1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \mathcal{M}(g)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

2. Comme $\mathcal{M}(g \circ f)_B = \mathcal{M}(g)_B \mathcal{M}(f)_B$ alors $\mathcal{M}(g \circ f)_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   et $\mathcal{M}(f \circ g)_B = \mathcal{M}(f)_B \mathcal{M}(g)_B$ alors $\mathcal{M}(f \circ g)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Soient $u_1 = (0,0,0,1)$, $u_2 = (0,0,1,1)$, $u_3 = (0,1,1,1)$ et $u_4 = (1,1,1,1)$,
   a) On a $Card(B') = 4 = dim\mathbb{R}^4$, donc B' est une base de $\mathbb{R}^4$ ssi B' est libre.
   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$ donc $\lambda_1(0,0,0,1) + \lambda_2(0,0,1,1) + \lambda_3(0,1,1,1) + \lambda_4(1,1,1,1) = 0$ ce qui implique que

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & -\lambda_4 \\ \lambda_2 & = & -\lambda_3 - \lambda_4 \\ \lambda_1 & = & -\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 \end{array} \right. \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0
$$

B' est libre par conséquent B' est une base de $\mathbb{R}^4$.

b)

$$\begin{cases} f(u_1)=(0,0,0,1)\\ f(u_2)=(0,0,1,2)\\ f(u_3)=(0,1,2,3)\\ f(u_4)=(1,2,3,4)\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(u_1)=u_1\\ f(u_2)=u_1+u_2\\ f(u_3)=u_1+u_2+u_3\\ f(u_4)=u_1+u_2+u_3+u_4\end{cases} \Longrightarrow \mathcal{M}(f)_{B'}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} g(u_1)=(1,1,1,1)\\ g(u_2)=(2,2,2,1)\\ g(u_3)=(3,3,2,1)\\ g(u_4)=(4,3,2,1)\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g(u_1)=u_4\\ g(u_2)=2u_4-u_1\\ g(u_3)=3u_4-u_1-u_2\\ g(u_4)=4u_4-u_1-u_2-u_3\end{cases} \Longrightarrow \mathcal{M}(g)_{B'}=\begin{pmatrix}0&-1&-1&-1\\0&0&-1&-1\\0&0&0&-1\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$

c) Comme $\mathcal{M}(g\circ f)_{B'}=\mathcal{M}(g)_{B'}\mathcal{M}(f)_{B'}$ alors $\mathcal{M}(g\circ f)_{B'}=\begin{pmatrix}0&-1&-2&-3\\0&0&-1&-2\\0&0&0&-1\\1&3&6&10\end{pmatrix}$ et

$$\mathcal{M}(f\circ g)_{B'}=\mathcal{M}(f)_{B'}\mathcal{M}(g)_{B'} \text{ alors } \mathcal{M}(f\circ g)_{B'}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$

4. On remarque que $\mathcal{M}(f\circ g)_B=\mathcal{M}(f\circ g)_{B'}$.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $B=(e_1,e_2)$ une base de E. On considère l'endomorphisme f de E définie par

$$\begin{cases} f(e_1)=e_1+e_2\\ f(e_2)=e_1-e_2\end{cases}$$

1.

$$\begin{cases} f(e_1)=e_1+e_2\\ f(e_2)=e_1-e_2\end{cases} \Longrightarrow \mathcal{M}(f)_B=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

2. Soient les vecteurs $e'_1=e_1+e_2$ et $e'_2=e_1-e_2$ de E

a) On a $Card(B')=2=dimE$, donc B' est une base de E ssi B' est libre.
Soient $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1e'_1+\lambda_2e'_2=0$ donc $(\lambda_1+\lambda_2)e_1+(\lambda_1-\lambda_2)e_2=0$, Or $B'=(e_1,e_2)$ une base de E ce qui implique que

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 &= 0\\ \lambda_1-\lambda_2 &= 0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 &= 0\\ 2\lambda_1 &= 0\end{cases} \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$$

B' est libre par conséquent B' est une base de E.

b) La matrice de passage $P(B,B')$ de la base B à la base B':

$$\begin{cases} e'_1=e_1+e_2\\ e'_2=e_1-e_2\end{cases} \Longrightarrow P(B,B')=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

c) La matrice de passage $P(B',B)$ la base B' à la base B est définie par $P(B',B)=P(B,B')^{-1}$.

$$\begin{cases} e'_1=e_1+e_2\\ e'_2=e_1-e_2\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2e_1=e'_1+e'_2\\ 2e_2=e'_1-e'_2\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} e_1=\frac{1}{2}e'_1+\frac{1}{2}e'_2\\ 2e_2=\frac{1}{2}e'_1-\frac{1}{2}e'_2\end{cases} \Longrightarrow P(B',B)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

d) On

$$\begin{cases} f(e'_1)=f(e_1+e_2)=f(e_1)+f(e_2)=e_1+e_2+e_1-e_2=2e_1=e'_1+e'_2\\ f(e'_2)=f(e_1-e_2)=f(e_1)-f(e_2)=e_1+e_2-e_1+e_2=2e_2=e'_1-e'_2\end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{M}(f)_{B'}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

e) On a $P_{B'B}.\mathcal{M}(f)_B.P_{BB'}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\mathcal{M}(f)_{B'}$.