Université Hassan II, Casablanca
Faculté des Sciences Ain Chock,
Département de Mathématiques
et Informatique

2016/2017
SMPC
Algèbre II

SERIE 3 (Correction)

Exercice 1.

a) Soit $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (3, 1, 2)$ et $u_3 = (2, 3, 1)$.
Le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-il libre? Soient λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ ce qui implique $\lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(3, 1, 2) + \lambda_3(2, 3, 1) = (0, 0, 0)$ et donc $(\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$. Par suite on aurai le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &=& 0 & L_1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &=& 0 & L_2 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &=& 0 & L_3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &=& 0 & L_1 \\ -5\lambda_2 - \lambda_3 &=& 0 & L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ -7\lambda_2 - 5\lambda_3 &=& 0 & L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &=& 0 & L_1 \\ -5\lambda_2 - \lambda_3 &=& 0 & L_2 \\ -7\lambda_2 - 5\lambda_3 &=& 0 & L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &=& 0 & L_1 \\ -5\lambda_2 - \lambda_3 &=& 0 & L_2 \\ 18\lambda_2 &=& 0 & L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_1 = 0$$

Le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est alors libre.
Le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est donc une base de F et $dimF = 3$.
Comme F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $dimF = dim\mathbb{R}^3 = 3$ alors $F = \mathbb{R}^3$.

b) Soit $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (2, 0, 1)$ et $u_3 = (4, -2, 3)$.
Le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-il libre? Soient λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ ce qui implique $\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(2, 0, 1) + \lambda_3(4, -2, 3) = (0, 0, 0)$ et donc $(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3, \lambda_1 - 2\lambda_3, \lambda_2 + 3\lambda_3) = (0, 0, 0)$. Par suite on aurai le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &=& 0 & L_1 \\ \lambda_1 - 2\lambda_3 &=& 0 & L_2 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 &=& 0 & L_3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_1 &=& 2\lambda_3 \\ \lambda_2 &=& -3\lambda_3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_3 &\in& \mathbb{R} \\ \lambda_1 &=& 2\lambda_3 \\ \lambda_2 &=& -3\lambda_3 \end{array}\right.$$

$\exists(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0))$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ par exemple $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2, -3, 1)$ et $2u_1 - 3u_2 + u_3 = 0$
Le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ n'est donc pas libre.
De la relation $2u_1 - 3u_2 + u_3 = 0$, on déduit que $u_3 = -2u_1 + 3u_2$ et le système $\{u_1, u_2\}$ est alors générateur de F. D'où $F = Vect\{u_1, u_2\}$. On vérifie que le systèmes $\{u_1, u_2\}$ est libre et alors $\{u_1, u_2\}$ est une bases de F et $dimF = 2$.

Exercice 2.

a) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel suivant:

$$F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0,\ y + z - t = 0\}$$

Soit $X = (x,y,z,t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$:

$$X = (x,y,z,t) \in F_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ y+z-t &= 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -y+z \\ t &= y+z \\ y,z &\in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y,z,t) = (-y+z, y, z, y+z)$$

$$X = (x,y,z,t) \in F_1 \Longleftrightarrow (x,y,z,t) = y(-1,1,0,1) + z(1,0,1,1), \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

$$F_1 = \{y(-1,1,0,1) + z(1,0,1,1), \quad (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = Vect\{(-1,1,0,1),(1,0,1,1)\}$$

Comme les vecteurs $(-1,1,0,1),(1,0,1,1)$ ne sont pas colinéaire alors la famille $\{(-1,1,0,1),(1,0,1,1)\}$ est une base de F_1 et $dim F_1 = 2$.

b) Soit $F_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = 0, \ x = z = t\}$
Soit $X = (x,y,z,t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$:

$$X = (x,y,z,t) \in F_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z = t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y &= 0 \\ z &= x \\ t &= x \\ x &\in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y,z,t) = (x,0,x,x)$$

$$X = (x,y,z,t) \in F_2 \Longleftrightarrow (x,y,z,t) = x(1,0,1,1), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F_2 = \{x(1,0,1,1), \quad x \in \mathbb{R}\} = Vect\{(1,0,1,1)\}$$

$\{(1,0,1,1)\}$ est alors une base de F_2 et $dim F_2 = 1$.

Exercice 3.

a) Soients $u_1 = (1,0,-2,1)$, $u_2 = (2,1,-1,0)$, $u_3 = (3,2,0,-1)$, $u_4 = (1,0,-1,1)$ et $F = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$.
On a

$$\begin{cases} u_1 &= 1 & 0 & -2 & 1 \\ u_2 &= 2 & 1 & -1 & 0 \\ u_3 &= 3 & 2 & 0 & -1 \\ u_4 &= 1 & 0 & -1 & 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'_1 = u_1 &= 1 & 0 & -2 & 1 \\ u'_2 = u_2 - 2u_1 &= 0 & 1 & 3 & -2 \\ u'_3 = u_3 - 3u_1 &= 0 & 2 & 6 & -4 \\ u'_4 = u_4 - u_1 &= 0 & 0 & 1 & 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u''_1 = u'_1 &= 1 & 0 & -2 & 1 \\ u''_2 = u'_2 &= 0 & 1 & 3 & -2 \\ u''_3 = u'_3 - 2u'_2 &= 0 & 0 & 0 & 0 \\ u''_4 = u'_4 &= 0 & 0 & 1 & 0 \end{cases}$$

$$u'_3 - 2u'_2 = 0 \Longrightarrow u_3 - 3u_1 - 2(u_2 - 2u_1) = 0 \Longrightarrow u_3 = -u_1 + 2u_2$$

Donc $F = Vect\{u_1,u_2,u_3,u_4\} = Vect\{u_1,u_2,u_4\}$ puisque u_3 s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1$et u_2. Et comme $\{u_1,u_2,u_4\}$ est libre:
$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1(1,0,-2,1) + \lambda_2(2,1,-1,0) + \lambda_3(1,0,-1,1) = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = -\lambda_1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Par conséquent $\{u_1,u_2,u_4\}$ est une base de F et $dim F = 3$.

b) On a

$$\begin{cases} u_1 &= 1 \quad 0 \quad -2 \quad -2 \\ u_2 &= 2 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \\ u_3 &= 3 \quad 2 \quad 0 \quad 2 \\ u_4 &= 4 \quad 2 \quad -2 \quad 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'_1 = u_1 &= 1 \quad 0 \quad -2 \quad -2 \\ u'_2 = u_2 - 2u_1 &= 0 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \\ u'_3 = u_3 - 3u_1 &= 0 \quad 2 \quad 6 \quad 8 \\ u'_4 = u_4 - 4u_1 &= 0 \quad 2 \quad 6 \quad 8 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} u''_1 = u'_1 &= 1 \quad 0 \quad -2 \quad -2 \\ u''_2 = u'_2 &= 0 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \\ u''_3 = u'_3 - 2u'_2 &= 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ u''_4 = u'_4 - 2u'_2 &= 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'_3 - 2u'_2 = 0 \Longrightarrow u_3 = 2u_2 - u_1 \\ u'_4 - 2u'_2 = 0 \Longrightarrow u_4 = 2u_2 \end{cases}$$

Donc $F = Vect\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = Vect\{u_1, u_2\}$ puisque u_3 et u_4 s'écrient comme combinaison linéaire de u_1 et u_2. Et comme u_1 et u_2 ne sont colinéaire alors $\{u_1, u_2\}$ est libre et par conséquent $\{u_1, u_2\}$ est une base de F et $dimF = 2$.

Exercice 4.

Soient les vecteurs $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (-1, 2, -1)$, $u_3 = (0, -1, \lambda)$ et soit $F = \{u_1, u_2, u_3\}$ est un système d'ordre 3 et $dim\mathbb{R}^3 = 3$. Pour montrer que $F = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit alors de montrer que F est libre.

Discutons la dépendance des vecteurs $\{u_1, u_2, u_3\}$ selon les valeurs du paramètre λ .

Soient α_1, α_1, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \Longrightarrow \alpha_1(1, -1, 0) + \alpha_2(-1, 2, -1) + \alpha_3(0, -1, \lambda) = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + \lambda\alpha_3 &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_2 &= \alpha_1 \\ \alpha_3 &= \alpha_1 \\ (\lambda - 1)\alpha_1 &= 0 \end{cases}$$

Donc si $\lambda \neq 1$ alors $\lambda - 1 \neq 0$

$$\begin{cases} \alpha_2 &= \alpha_1 \\ \alpha_3 &= \alpha_1 \\ (\lambda - 1)\alpha_1 &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_2 &= \alpha_1 \\ \alpha_3 &= \alpha_1 \\ \alpha_1 &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Le système $F = \{u_1, u_2, u_3\}$ est libre et donc si $\lambda \neq 1$ alors $F = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Maintenant si $\lambda = 1$ alors

$$\begin{cases} \alpha_2 &= \alpha_1 \\ \alpha_3 &= \alpha_1 \\ (\lambda - 1)\alpha_1 &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_2 &= \alpha_1 \\ \alpha_3 &= \alpha_1 \\ \alpha_1 &\in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\exists(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$, par exemple $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 1, 1)$ et $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.
Le système $F = \{u_1, u_2, u_3\}$ est lié. Donc si $\lambda = 1$ alors $F = \{u_1, u_2, u_3\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.

On considère l'application f définie par $f(x, y, z) = (y - z, x + z, z)$

a) Montrons que l'application f est linéaire.
Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2$ avec $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$
On vérifie que $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a : $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$
L'application f est alors linéaire.

b) Calcul de l'application $f \circ f$
$f((x, y, z)) = (y - z, x + z, z) \Longrightarrow (fof)(x, y, z) = f(f(x, y, z)) = f(y - z, x + z, z)$
$\Longrightarrow (fof)(x, y, z) = f(y - z, x + z, z) = ((x + z) - z, (y - z) + z, z) = (x, y, z)$
$\Longrightarrow f \circ f = Id_{\mathbb{R}^3}$
f est un automorphisme : L'application f est linéaire, bijective et $f^{-1} = f$ puisque $f \circ f = Id_{\mathbb{R}^3}$.

c) On a

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (y-z, x+z, z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} y-z &= 0 \\ x+z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} y &= z \\ x &= -z \\ z &= 0 \end{cases} \\ &= \{(0,0,0)\} \end{aligned}$$

On a $Imf = Vect\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ avec (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ donc

$$Imf = Vect\{(0,1,0), (1,0,0), (-1,1,1)\}$$

On pose $u_1 = (0,1,0)$, $u_2 = (1,0,0)$ et $u_3 = (-1,1,1)$ et $F = \{u_1, u_2, u_3\}$. F est-il libre? Soient α_1, α_2 et $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \Longrightarrow \alpha_1(0,1,0) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(-1,1,1) = 0$, donc

$$\begin{cases} \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est donc libre. $\{u_1, u_2, u_3\}$ est alors une base de Imf , $dim(Imf) = 3$ alors $Imf = \mathbb{R}^3$.

Exercice 6.

On considère l'application linéaire f définie par $f(x,y,z,t) = (x-y, z-t, y-x)$

a) On a

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid f(x,y,z,t) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x-y, z-t, y-x) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x-y &= 0 \\ z-t &= 0 \\ y-x &= 0 \end{cases} \} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} y &= x \\ t &= z \\ x,z &\in \mathbb{R} \end{cases} \\ &= \{(x,x,z,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,1,0,0) + z(0,0,1,1) \mid x,z \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\} \end{aligned}$$

Donc $\{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$ est une base de $Ker(f)$.

En déduire le rang de f ($rg(f)$):

On a $dim(Ker(f)) = 2$ et $rg(f) + dim(Ker(f)) = dim\mathbb{R}^4$ ce qui implique que $rg(f) = 4 - dim(Ker(f))$ et $rg(f) = 2$.

b) Calculons l'image de la base canonique et en déduire une base de $Im(f)$

Soient $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$: on a

$$\begin{aligned} Im(f) &= Vect\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\} \\ &= Vect\{(1,0,-1), (-1,0,1), (0,1,0), (0,-1,0)\} \\ &= Vect\{(1,0,-1), (0,1,0)\} \end{aligned}$$

Et comme le système $\{(1,0,-1), (0,1,0)\}$ est libre alors $\{(1,0,-1), (0,1,0)\}$ est une base de Imf et $dimIm(f) = 2$.

Exercice 7.

Soit $\varphi : I\!R^3 \to I\!R^3$ définie par $\varphi(x,y,z) = (3x+y-z, 2x+2y-z, 4x+2y-z)$

1. Montrons que l'application φ est linéaire.
   Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in I\!R^3$
   On vérifie que $\forall(\alpha,\beta) \in I\!R^2$, on a : $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$
   L'application φ est alors linéaire.

2. On a

$$\begin{aligned} P &= \{u = (x,y,z) \in I\!R^3, \varphi(u) = u\} \\ &= \{(x,y,z) \in I\!R^3, (3x+y-z, 2x+2y-z, 4x+2y-z) = (x,y,z)\} \\ &= \{(x,y,z) \in I\!R^3, (2x+y-z, 2x+y-z, 4x+2y-2z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in I\!R^3, 2x+y-z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in I\!R^3, z = 2x+y\} \\ &= \{(x,y,2x+y), x,y \in I\!R\} \\ &= \{x(1,0,2) + y(0,1,1), x,y \in I\!R\} \\ &= Vect\{(1,0,2),(0,1,1)\} \end{aligned}$$

Donc P est un sous espace vectoriel.

$$\begin{aligned} D &= \{u = (x,y,z) \in I\!R^3, \varphi(u) = 2u\} \\ &= \{(x,y,z) \in I\!R^3, (3x+y-z, 2x+2y-z, 4x+2y-z) = (2x,2y,2z)\} \\ &= \{(x,y,z) \in I\!R^3, (x+y-z, 2x-z, 4x+2y-3z) = (0,0,0)\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in I\!R^3, \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 0 \\ 2x-z &=& 0 \\ 4x+2y-3z &=& 0 \end{array}\right.\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in I\!R^3, \left\{\begin{array}{rcl} y &=& x \\ z &=& 2x \end{array}\right.\right\} \\ &= \{(x,x,2x), x \in I\!R\} \\ &= \{x(1,1,2) x \in I\!R\} \\ &= Vect\{(1,1,2)\} \end{aligned}$$

Ce qui implique que D est un sous espace vectoriel.

3. Puisque la famille $\{(1,0,2),(0,1,1)\}$ est libre et engendre P donc $\{(1,0,2),(0,1,1)\}$ est une base de P et $dimP = 2$.
   Puisque $D = Vect\{(1,1,2)\}$ donc $dimD = 1$ en plus le vecteur $(1,1,2) \notin P$ donc $P \cap D = \{0\}$. Comme $dimI\!R^3 = dimP + dimD$ et $P \cap D = \{0\}$ alors en déduit que $I\!R^3 = P \oplus D$.

Exercice 8.

1)$\Longrightarrow$2) Si on suppose que $rg(f) = rg(f^2)$, il est clair que $Kerf \subset Kerf^2$, on utilisant le théorème de rang on a $n = dimE = dimKerf + dimImf = dimKerf^2 + dimImf^2$ or $dimIm(f) = dimIm(f^2)$ donc $dimKerf = dimKerf^2$ et puisque $Kerf \subset Kerf^2$, on déduit que $Kerf = Kerf^2$.

2)$\Longrightarrow$3) Si $Kerf = Kerf^2$, d'après le théorème de rang on a $n = dimE = dimKerf + dimImf = dimKerf^2 + dimImf^2$ or $dimKer(f) = dimKer(f^2)$ donc $dimIm(f) = dimIm(f^2)$ et comme $Imf^2 \subset Imf$ alors $Imf = Imf^2$.

3)$\Longrightarrow$4) Si $Imf = Imf^2$, Soit $x \in E$ alors $f(x) \in Imf = Imf^2$ donc $\exists x_0 \in E$ tel que $f(x) = f^2(x_0)$ par suite $f(x - f(x_0)) = 0$ ce qui implique que $x - f(x_0) \in Kerf$ et $x = \underbrace{x - f(x_0)}_{Kerf} + \underbrace{f(x_0)}_{Imf}$ et ceci $\forall x \in E$ donc $E = Kerf + Imf$. Et puisque $dimE = dimKerf + dimImf$ alors $E = Kerf \oplus Imf$.