SERIE 2 (Correction)

Exercice 1.

La loi interne $\oplus$ est associative, admet un élément neutre $(0, 0)$, symétrisable et commutative. par contre la loi externe $\otimes$ n'est pas distributive. En effet

$$(1 + 2) \otimes (1, 2) = (3, 2)$$

et

$$1 \otimes (1, 2) \oplus 2 \otimes (1, 2) = (1, 2) \oplus (2, 2) = (3, 4).$$

par conséquent $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ n'est pas un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 2.

1. Le couple $(x, y) = (0, 1)$ est élément de F_1 mais ce n'est pas le cas du couple $-(x, y) = (0, -1)$. F_1 n'est donc pas stable par combinaison linéaire et ce ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2. On a

- $(0, 0, 0) \in F_2$
- Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in F_2$, donc $x - y - 2z = 0$ et $x' - y' - 2z' = 0$ par suite $(x - y - 2z) + (x' - y' - 2z') = 0$ et $(x + x') - (y + y') - 2(z + z') = 0$ ce qui implique que $(x + x', y + y', z + z') \in F_2$ et donc $(x, y, z) + (x', y', z') \in F_2$.
- Soient $(x, y, z) \in F_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $x - y - 2z = 0$ en multipliant cette équation par λ on aura $\lambda x - \lambda y - 2\lambda z = 0$ ce qui implique que $\lambda(x, y, z) \in F_2$.

Par conséquent F_2 forme un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3.

$$\begin{aligned} F_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x = 2y \end{cases}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} z = y - x = -y \\ x = 2y \end{cases}\} \\ &= \{(2y, y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2, 1, -1) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(2, 1, -1)\} \end{aligned}$$

et par conséquent F_3 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4. Le couple nul $(0, 0)$ n'est pas élément de F_4 et donc F_4 ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.

$\implies$ Supposons que $F \not\subseteq G$ et que $G \not\subseteq F$. On peut alors trouver deux vecteurs non nuls $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. $x + y$ ne peut être élément de $F \cup G$: sinon on aurait $x + y \in F$ (ou $x + y \in G$) et donc, F étant stable par combinaison linéaire $y = x + y - x$ serait élément de F (on fait le même raisonnement si $x + y \in G$) ce qui n'est pas possible par hypothèse. Par conséquent $F \cup G$ n'est pas un sous-espace

vectorel de E . La première implication est ainsi prouvée par contraposée.

← Supposons que $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$ et dans les deux cas $F \cup G$ est un sev de E .

Exercice 4.

1. On peut vérifier que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\} = Vect\{(1, 0, -2), (0, 1, 1)\}$ et $G = \{(\lambda, -\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = Vect\{(1, -1, 1)\}$. ce qui implique que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E . Pour déterminer $F \cap G$ il suffit de résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

ce qui implique que $\lambda = 0$ ce qui amène $F \cap G = (0, 0, 0)$. F et G sont donc en somme directe.

Soit $(x, y, z) \in E$, on va montrer qu'il existe des scalaires α, β et γ dans $\mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = \alpha(1, 0, -2) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, -1, 1)$.

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, -2) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, -1, 1) \iff \begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \beta - \gamma = y \\ -2\alpha + \beta + \gamma = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \beta - \gamma = y \\ \beta + 3\gamma = z + 2x \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \beta - \gamma = y \\ 4\gamma = z + 2x - y \end{cases}$$

et donc

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, -2) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(1, -1, 1) \iff \begin{cases} \gamma = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z \\ \beta = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}z \\ \alpha = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z \end{cases}$$

et donc $F + G = E$. On a ainsi montré que $F \oplus G = E$.

2. On peut vérifier que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z = 0\} = Vect\{(-2, 1, 3)\}$ et $G = \{(3\lambda, 2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = Vect\{(3, 2, 1)\}$, donc F et G sont des sous-espaces vectoriels de E . Supposons que $F \oplus G = E$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^3$ il existe des scalaires uniques α et β dans $\mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = \alpha(-2, 1, 3) + \beta(3, 2, 1)$ ce qui implique

$$(x, y, z) = \alpha(-2, 1, 3) + \beta(3, 2, 1) \iff \begin{cases} -2\alpha + 3\beta = x \\ \alpha + 2\beta = y \\ 3\alpha + \beta = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta = y \\ 7\beta = x + 2y \\ -5\beta = z - 3y \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta = y \\ 7\beta = x + 2y \\ 0 = 7z + 5x - 11y \end{cases}$$

et donc si $7z + 5x - 11y = 0$ le système admet une infinité de solutions ce qui est en contradiction avec l'unicité des solution (α, β) par contre si $7z + 5x - 11y \neq 0$ il n'y a pas de solution. Par conséquent $F \oplus G \neq E$.

Exercice 5.

ce qui donne $\beta = 0$, $\gamma = 0$ et $\alpha = 0$.

En plus la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice: Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on va montrer qu'il existe des scalaires α, β et γ dans $\mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. Or

$$(x, y, z) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(3, 0, -1) + \gamma(-1, 1, -1) \iff \begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma = x \\ \alpha + \gamma = y \\ \alpha - \beta - \gamma = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma = x \\ -3\beta + 2\gamma = y - x \\ -4\beta = z - x \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{x+4y+3z}{8} \\ \gamma = \frac{-x+4y-3z}{8} \\ \beta = \frac{x-z}{4} \end{cases}$$

et donc $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ il existe des scalaires α, β et γ dans $\mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$. par suite la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice et libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. La famille constituée de $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 10, 11)$ est liée, car le vecteur v_2 est combinaison linéaire de v_1 et de v_3 ($v_2 = \frac{5}{4}v_1 - \frac{1}{4}v_3$). par suite $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{v_1, v_3\}$ et puisque les vecteurs v_1 et v_3 ne sont pas colinéaire donc $\{v_1, v_3\}$ est une base de sous espace engendrant $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Exercice 8.

1. $D = \{f \in E / f(x) = f(1-x)\}$

- a) Pour $f = 0$ on a $f(x) = 0$ et $f(1-x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$ et donc $f(x) = f(1-x) = 0$. par suite $0 \in D$.
- b) Soient f et $g \in D$, on a $f(x) = f(1-x)$ et $g(x) = g(1-x)$ et donc $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(1-x) + g(1-x) = (f+g)(1-x)$. Ce qui implique que $f+g \in D$.
- c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in D$ on a $g(x) = g(1-x)$, donc $(\alpha g)(x) = \alpha g(x) = \alpha g(1-x) = (\alpha g)(1-x)$, ce qui implique que $\alpha g \in D$.

Par conséquent D est un sous espace vectoriel.

2. $F = \{f \in E / f \text{ polynôme de degré } 4\}$

L'ensemble F ne contient pas la fonction nulle car le polynôme correspondant est de degré $-\infty$. Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

3. La fonction nulle est un polynôme de degré $-\infty \leq 4$, donc $o \in G$.

La somme de deux polynômes de degré ≤ 4 est aussi un polynôme de degré ≤ 4

Le produit d'un polynôme de degré ≤ 4 par un scalaire est un un polynôme de degré ≤ 4 .

Ce qui implique que G est un sous espace vectoriel de E.

Exercice 9.

Soit $(x, y, z, t) \in H$, donc $x + 3y - 2z - 5t = 0$ et $x + 2y + z - t = 0$.

$$\implies \begin{cases} x = -2y - z + t \\ -2y - z + t + 3y - 2z - 5t = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2y - z + t \\ y - 3z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = -2y - z + t \\ y = 3z + 4t \end{cases} \implies \begin{cases} x = -6z - 8t - z + t = -7z - 7t \\ y = 3z + 4t \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
 H &= \left\{ \begin{array}{l} x = -7z - 7t \\ y = 3z + 4t \end{array} \right\} \\
 &= \{(-7z - 7t, 3z + 4t, z, t) \text{ avec } z, t \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{(-7z, 3z, z, 0) + (-7t, 4t, 0, t) \text{ avec } z, t \in \mathbb{R}\} \\
 &= \{z(-7, 3, 1, 0) + t(-7, 4, 0, 1) \text{ avec } z, t \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{Vect}\{(-7, 3, 1, 0), (-7, 4, 0, 1)\}.
 \end{aligned}$$

Donc H est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et la famille $\{(-7, 3, 1, 0), (-7, 4, 0, 1)\}$ engendre H . Montrons que $\{(-7, 3, 1, 0), (-7, 4, 0, 1)\}$ est libre. en effet, soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(-7, 3, 1, 0) + \beta(-7, 4, 0, 1) = 0$ donc

$$\begin{cases} -7\alpha - 7\beta = 0 \\ 3\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

donc $\{(-7, 3, 1, 0), (-7, 4, 0, 1)\}$ est libre et par conséquent $\{(-7, 3, 1, 0), (-7, 4, 0, 1)\}$ est une base de H .

Exercice 10.

1. Montrer que dans $\mathbb{K}[X]$, toute famille de polynômes non nuls à degrés strictement croissants est libre. démonstration par récurrence:

- Un polynôme non nul forme une famille libre: $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = \sum_{i=0}^n \alpha_i X^i$, soit $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma P(X) = \sum_{i=0}^n \gamma \alpha_i X^i = 0 \implies \gamma \alpha_i = 0, \forall i \in \{0, \dots, n\}$. et comme P est non nul donc $\exists \alpha_{i_0} \neq 0$ donc $\gamma \alpha_{i_0} = 0$ par suite $\gamma = 0$.

- Hyp: Supposons que toute famille de n polynômes de degrés strictement croissant est libre. et soit une famille $(P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\deg P_i, \deg P_{i+1}$ et soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i P_i = 0$. le coefficient dominant de $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i P_i$ est $\lambda_{n+1} \text{dom}(P_{n+1})$ et $\text{dom}(P_{n+1})$ est le coefficient dominant de P_{n+1} qui est de degré $n+1$ donc $\text{dom}(P_{n+1}) \neq 0$ et par suite $\lambda_{n+1} = 0$ ce qui implique $\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = 0$ et par hypothèse de récurrence on a $\lambda_i = 0, 1 \leq i \leq n$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$ et par conséquent la famille $(P_1, \dots, P_n, P_{n+1})$ est libre.

2. Soit P un polynôme de degré n , alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket P^{(i)}$ est de degré n_i donc la famille $(P, P', \dots, P^{(n)})$ constitue une famille de polynôme non nuls à degré strictement croissant puisque $\deg P^{(i+1)} < \deg P^{(i)}$, donc d'après la question 1 la famille $(P, P', \dots, P^{(n)})$ est libre.

Exercice 11.

On considère l'application :

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, -3x - 3y - 2z)$$

1. - Soit $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{aligned}
 f((x, y, z) + (x', y', z')) &= f(x + x', y + y', z + z') \\
 &= (2(x + x') + (y + y') + (z + z'), (x + x') + 2(y + y') + (z + z'), -3(x + x') - 3(y + y') - 2(z + z')) \\
 &= (2x + y + z, x + 2y + z, -3x - 3y - 2z) + (2x' + y' + z', x' + 2y' + z', -3x' - 3y' - 2z') \\
 &= f(x, y, z) + f(x', y', z')
 \end{aligned}$$

Donc $y \in V$ et

$$\begin{aligned} f(z) &= f\left(\frac{x+if(x)}{2}\right) = \frac{f(x)+if \circ f(x)}{2} \\ &= \frac{f(x)-ix}{2} = \frac{-i^2 f(x)-ix}{2} \\ &= -i\left(\frac{x+if(x)}{2}\right) = -iz \end{aligned}$$

Donc $z \in W$

En plus, on a $y + z = \frac{x-if(x)}{2} + \frac{x+if(x)}{2} = x$. Ce qui montre $\forall x \in E, \exists y \in V$ et $z \in W$ tel que $x = y + z$ donc $E = V + W$.

Montrons maintenant que $V \cap W = \{0\}$. Soit $x \in V \cap W$, donc $x \in V$ et $x \in W$ ce qui implique que $f(x) = ix$ et $f(x) = -ix$ et donc $2f(x) = 0$, par suite $f(x) = 0$. Comme $f \circ f = -id$ on a $-x = f \circ f(x) = f(0) = 0 \implies x = 0$ ce qui implique $V \cap W = \{0\}$. Par conséquent $E = V \oplus W$.

Exercice 13.

Supposons que f n'est pas nulle, donc $\exists x \in E$ tel que $f(x) \neq 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et posons $y = \frac{\lambda x}{f(x)} \in E$

On a

$$f(y) = f\left(\frac{\lambda x}{f(x)}\right) = \frac{\lambda}{f(x)} f(x) = \lambda.$$

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \exists y \in E$ tel que $f(y) = \lambda$ ce qui implique que f est surjective.

Exercice 14.

- On suppose que $p + q$ est un projecteur. Alors $(p + q)^2 = p + q$ et en développant, on obtient $p^2 + q^2 + p \circ q + q \circ p = p + q$. p, q étant des projecteurs, on a : $p^2 = p$ et $q^2 = q$ et donc $p \circ q + q \circ p = 0$. On va montrer que $Imq \subset Kerp$ ce qui amènera $p \circ q = 0$ et donc $q \circ p = 0$. Soit $y \in Imq$. Alors $p(y) + q(p(y)) = 0$. Comme $E = Kerq \oplus Imq$, il existe $X \in Kerq$ et $Y \in Imq$ tel que $p(y) = X + Y$. Alors $X + Y + q(X + Y) = 0$ soit $X + 2Y = 0$. Par unicité de la décomposition d'un vecteur sur une somme directe, il vient $X = Y = 0$ et donc $p(y) = 0$. On a prouvé que $Imq \subset Kerq$ et la première implication est démontré.

- Pour la seconde, supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$ alors $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + p \circ q + q \circ p = p + q$ car p et q sont des projecteurs.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z)) &= f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ &= (2\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x + 2\lambda y + \lambda z, -3\lambda x - 3\lambda y - 2\lambda z) \\ &= \lambda(2x + y + z, x + 2y + z, -3x - 3y - 2z) \\ &= \lambda f(x, y, z) \end{aligned}$$

Donc $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est linéaire donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2.

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y, z)) = 0 &\iff (2x + y + z, x + 2y + z, -3x - 3y - 2z) = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 & (L_1) \\ x + 2y + z = 0 & (L_2) \\ -3x - 3y - 2z = 0 & (L_3) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 & L_1 \rightarrow L_2 \\ 2x + y + z & L_2 \rightarrow L_1 \\ -3x - 3y - 2z = 0 & L_3 \rightarrow L_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 & L_1 \\ -3y - z & L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ 3y + z = 0 & L_3 \rightarrow L_3 + 3L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 & L_1 \\ 3y + z = 0 & L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $z = -3y$ et $x = -z - 2y = 3y - 2y = y$, par suite la solution du système est $\{(y, y, -3y), y \in \mathbb{R}\} = \{y(1, 1, -3), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(1, 1, -3)\}$. Donc $\text{Ker } f = \text{Vect}\{(1, 1, -3)\}$. Ce qui montre que f n'est pas injective ($\text{Ker } f \neq \{0\}$).

- On a

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \{f(x, y, z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(2x + y + z, x + 2y + z, -3x - 3y - 2z), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(2, 1, -3) + y(1, 2, -3) + z(1, 1, -2), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}\{(2, 1, -3), (1, 2, -3), (1, 1, -2)\} \end{aligned}$$

et comme $(1, 2, -3) = 3(1, 1, -2) - (2, 1, -3)$ ce qui implique que $\text{Im } f = \text{Vect}\{(2, 1, -3), (1, 2, -3), (1, 1, -2)\} = \text{Vect}\{(2, 1, -3), (1, 1, -2)\} \neq \mathbb{R}^3$. Par conséquent f n'est pas surjective. ($\dim \text{Im } f = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$).

Exercice 12.

On a V et W sont des sev de E .

- $0 \in V$ et $0 \in W$ car E est un $\mathcal{C}$ -ev ($0 \in E$) et f un endomorphisme de E ($f(0) = 0$).
- Soit $x, y \in V$ on a $f(x) = ix$ et $f(y) = iy$ donc $f(x + y) = i(x + y) = ix + iy = f(x) + f(y)$, donc $x + y \in V$.
de même si $x, y \in W$ alors $x + y \in W$.
- Soit $\lambda \in \mathcal{C}$, $x \in V$ on a $f(x) = ix$ et $f(\lambda x) = i\lambda x = \lambda(ix) = \lambda f(x)$. donc $\lambda \in V$.
de même si $\lambda \in \mathcal{C}$, $x \in W$ alors $\lambda x \in W$.

Par conséquent V et W sont 2 sev de E .

Montrons que V et W sont supplémentaire dans E .

Soit $x \in E$ si on pose $y = \frac{x - if(x)}{2}$ et $z = \frac{x + if(x)}{2}$ on a

$$\begin{aligned} f(y) &= f\left(\frac{x - if(x)}{2}\right) = \frac{f(x) - if(x)f(x)}{2} \\ &= \frac{f(x) + ix}{2} = \frac{-i^2 f(x) + ix}{2} \\ &= i\left(\frac{x - if(x)}{2}\right) = iy \end{aligned}$$