Université Hassan II, Casablanca **2015/2016**
Faculté des Sciences Ain Chock, **SMPC**
Département de Mathématiques **Algèbre I**
et Informatique

SERIE 4 (Correction)

Exercice 1.

1. On a $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^3 + X + 2$.
   La division euclidiennes de A par B donne

$$
\begin{array}{cccccc|lll}
3X^5 & +2X^4 & & -X^2 & & +1 & X^3 & +X & +2 \\ \cline{7-9}
3X^5 & & +3X^3 & +6X^2 & & & 3X^2 & +2X & -3 \\ \cline{1-4}
 & 2X^4 & -3X^3 & -7X^2 & & +1 & & & \\
 & 2X^4 & & +2X^2 & +4X & & & & \\ \cline{2-5}
 & & -3X^3 & -9X^2 & -4x & +1 & & & \\
 & & -3X^3 & & -3X & -6 & & & \\ \cline{3-6}
 & & & -9X^2 & -X & +7 & & &
\end{array}
$$

   Donc le quotient de A par B est $3X^2 + 2X - 3$ et le reste est $-9X^2 - X + 7$.
   On a donc $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 = (X^3 + X + 2)(3X^2 + 2X - 3) - 9X^2 - X + 7$.

2. On pose $A = X^4 - X^3 + X - 2$ et $B = X^2 - 2X + 4$, donc la division euclidiennes de A par B donne

$$
\begin{array}{ccccc|lll}
X^4 & -X^3 & & +X & -2 & X^2 & -2X & +4 \\ \cline{6-8}
X^4 & -2X^3 & +4X^2 & & & X^2 & +X & -2 \\ \cline{1-3}
 & X^3 & -4X^2 & +X & -2 & & & \\
 & X^3 & -2X^2 & +4X & & & & \\ \cline{2-4}
 & & -2X^2 & -3X & -2 & & & \\
 & & -2X^2 & +4X & -8 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & -7X & +6 & & &
\end{array}
$$

   Le quotient de A par B est $X^2 + X - 2$ et le reste est $-7X + 6$.
   On a donc $X^4 - X^3 + X - 2 = (X^2 - 2X + 4)(X^2 + X - 2) - 7X + 6$.

Exercice 2.

1. On pose la division

$$
\begin{array}{ccccc|lll}
2 & & +X^2 & & & 1 & -X & +3X^2 \\ \cline{6-8}
2 & -2X & +6X^2 & & & 2 & +2X & -3X^2 \\ \cline{1-3}
 & 2X & -5X^2 & & & & & \\
 & 2X & -2X^2 & +6X^3 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & -3X^2 & -6X^3 & & & & \\
 & & -3X^2 & +3X^3 & -9X^4 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & -9X^3 & +9X^4 & & &
\end{array}
$$

   donc $2 + X^2 = (1 - X + 3X^2)(2 + 2X - 3X^2) + X^3(-9 + 9X)$.

2. On a

$$
\begin{array}{cccccc|l}
1 & -2X & & +X^3 & +X^4 & & 1 \quad +X \quad +X^2 \\
\cline{7-7}
1 & +X & +X^2 & & & & 1 \quad -3X \quad +2X^2 \quad +2X^3 \\
\cline{1-3}
 & -3X & -X^2 & +X^3 & +X^4 & & \\
 & -3X & -3X^2 & -3X^3 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 2X^2 & +4X^3 & +X^4 & & \\
 & & 2X^2 & +2X^3 & +2X^4 & & \\
\cline{3-5}
 & & & 2X^3 & -X^4 & & \\
 & & & 2X^3 & +2X^4 & +2X^5 & \\
\cline{4-6}
 & & & & -3X^4 & -2X^5 &
\end{array}
$$

donc $1 - 2X + X^3 + X^4 = (1 + X + X^2)(1 - 3X + 2X^2 + 2X^3) + X^4(-3 - 2X)$.

Exercice 3.

Soient $A = (X - 1)^3$ et $B = (X + 1)^2$.

1. On applique l'algorithme d'Euclide.
   On a
   $$(X - 1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$$
   et
   $$(X + 1)^2 = X^2 + 2X + 1$$
   donc
   $$
   \begin{array}{cccc|l}
   X^3 & -3X^2 & +3X & -1 & X^2 \quad +2X \quad +1 \\
   \cline{5-5}
   X^3 & +2X^2 & +X & & X \quad -5 \\
   \cline{1-3}
    & -5X^2 & +2X & -1 & \\
    & -X^2 & -10X & -5 & \\
   \cline{2-4}
    & & 12X & +4 &
   \end{array}
   $$
   Donc $(X - 1)^3 = (X + 1)^2(X - 5) + 12X + 4$.
   Ensuite pour simplifier
   $$
   \begin{array}{ccc|l}
   36X^2 & +72X & +36 & 12X \quad +4 \\
   \cline{4-4}
   36X^2 & +12X & & 3X \quad +5 \\
   \cline{1-2}
    & 60X & +36 & \\
    & 60X & +20 & \\
   \cline{2-3}
    & & 16 &
   \end{array}
   $$
   donc
   $$36(X + 1)^2 = (12X + 4)(3X + 5) + 16$$
   puisque le dernier reste est une constante non nul, alors $(X - 1)^3$ et $(X + 1)^2$ sont premiers entre eux.

2. En remontant les calculs, on en déduit
   $$
   \begin{array}{rcl}
   16 & = & 36(X + 1)^2 - (12X + 4)(3X + 5) \\
    & = & 36(X + 1)^2 - (3X + 5)((X - 1)^3 - (X + 1)^2(X - 5)) \\
    & = & -(3X + 5)(X - 1)^3 + (3X^2 - 10X + 11)(X + 1)^2
   \end{array}
   $$
   donc une solution de $AU + BV = 1$ est
   $$U = -\frac{1}{16}(3X + 5)$$

$$V = \frac{1}{16}(3X^2 - 10X + 11).$$

Exercice 4.

On a $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^3 - 1$

1.
$$\begin{array}{rrrr|rr}
X^3 & -X^2 & -X & -2 & X^3 & -1 \\ \cline{5-6}
X^3 & & & -1 & 1 & \\ \cline{1-4}
 & -X^2 & -X & -1 & &
\end{array}$$

donc
$$X^3 - X^2 - X - 2 = (X^3 - 1) \times 1 + (-X^2 - X - 1).$$

Ensuite
$$\begin{array}{rrrr|rrr}
X^3 & & & -1 & +X^2 & +X & +1 \\ \cline{5-7}
X^3 & +X^2 & +X & & X & -1 & \\ \cline{1-3}
 & -X^2 & -X & -1 & & & \\
 & -X^2 & -X & -1 & & & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

donc
$$X^3 - 1 = (X^2 + X + 1)(X - 1)$$

par suite
$$pgcd(P, Q) = X^2 + X + 1.$$

2. $X^2 + X + 1$ est une diviseur de P (et de Q) donc on peut mettre $X^2 + X + 1$ en facteur dans P
$$P = (X - 2)(X^2 + X + 1)$$
et il est évident d'après la deuxième division euclidienne
$$Q = (X - 1)(X^2 + X + 1).$$

3. Le discriminant de $X^2 + X + 1$ est $\Delta = -3$ donc admet deux racines complexes
$$X_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$
On a
$$X_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$
et
$$X_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$
or $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\overline{j} = j^2$ donc les deux racines complexes de $X^2 + X + 1$ sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\overline{j} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Ainsi
$$P = (X - 2)(X - j)(X - j^2).$$

Exercice 5.

Il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que
$$\begin{cases} A = (X + 1)^3 - 5 \\ A = (X - 1)^3 + 11 \end{cases}$$

$A+5$ admet donc -1 comme racine triple. De même 1 est racine de $A-11$.
Ainsi -1 est racine double de $(A+5)'=A'$ et 1 est racine double de $(A-11)'=A'$.
Donc A' est divisible par $(X+1)^2$ et par $(X-1)^2$ donc par $(X^2-1)^2=X^4-2X^2+1$. On sait que $deg\ A'=4$, il en résulte qu'il existe $\lambda \in I\!R$ tel que

$$A'=\lambda(X^4-2X^2+1).$$

On intègre: il existe $(\lambda,\mu)\in I\!R^2$tel que

$$A=\lambda(\frac{X^5}{5}-\frac{2}{3}X^3+X)+\mu.$$

Il reste à exprimer $A(-1)=-5$ et $A(1)=11$ donc

$$\begin{cases} -\frac{8}{15}\lambda+\mu=-5 \\ \frac{8}{15}\lambda+\mu=11 \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda=15$ et $\mu=3$.
Finallement

$$A=3X^5-10X^3+15X+3.$$

Exercice 6.

1. Il existe un unique couple (Q,R) de polynômes, avec $deg\ R<2$ tels que

$$(X+1)^n=(X-1)^2Q+R$$

donc, il existe a et b réels tels que

$$R=aX+b$$

ainsi

$$(X+1)^n=(X-1)^2Q+aX+b \qquad (*)$$

on pose $X=1$ donc $2^n=a+b$.
On dérive (*) on trouve

$$n(X+1)^{n-1}=2(X-1)Q+(X-1)^2Q'+a$$

on pose $X=1$ donc $n2^{n-1}=a$ et par suite $b=2^n-n2^{n-1}$.
Finallement

$$R=n2^{n-1}X+2^n-n2^{n-1}.$$

2. Si le polynôme est unitaire de degré 4 il s'écrit $(X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$, a,b,c,d designent ses quatres racines complexes.
On sait dèja que 2 est racine double (il compte deux fois dans la liste ci-dessus).
$1-i$ étant racine, il ne reste qu'une racine à trouver. On utilise alors le résultat suivant:
Si z est racine de P et P est à coefficients réels, $\overline{z}$ est racine de P. en effet

$$\begin{aligned} P(z)=0 &\implies \overline{P(z)}=0 \\ &\implies 0=\overline{P}(\overline{z})=P(\overline{z}) \end{aligned}$$

ainsi $1+i$ est racine de P.
Donc

$$\begin{aligned} P &= (X-2)^2(X-(1-i))(X-(1+i)) \\ &= (X^2-4X+4)(X^2-2X+2) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$P=X^4-6X^3+14X^2-16X+8.$$

Exercice 7.

1.

$$\begin{aligned}
A &= 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 \\
&= 1 + (-X) + (-X)^2 + (-X)^3 + (-X)^4 + (-X)^5 \\
&= \frac{1-(-X)^6}{1-(-X)} \\
&= \frac{1-X^6}{1+X}
\end{aligned}$$

pour $X \neq -1$.
donc

$$\begin{aligned}
P = 0 &\iff \begin{cases} X^6 = 1 \\ X \neq -1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ X \neq -1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X = e^{\frac{ik\pi}{3}}, \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\} \\ X \neq -1 \end{cases} \\
&\iff X = e^{\frac{ik\pi}{3}}, \quad k \in \{0,1,2,4,5\}
\end{aligned}$$

ce polynôme admet 5 racines.

$$X_0 = e^0 = 1, \;\; X_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}, \;\; X_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}},$$
$$X_3 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = \overline{X_2}, \;\; X_4 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = \overline{X_1}.$$

Donc la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

$$P = -(X-1)(X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{\frac{-i\pi}{3}})(X - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X - e^{\frac{-2i\pi}{3}}).$$

Et dans $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{aligned}
P &= -(X-1)(X^2 - 2\cos(\frac{\pi}{3})X + 1)(X^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{3})X + 1) \\
&= -(X-1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1).
\end{aligned}$$

2. Il revient à déterminer les racines quatrièmes de -1. Ce sont:

$$e^{\frac{i\pi}{4}} \;\; , \;\; e^{\frac{3i\pi}{4}} \;\; , \;\; e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}} \;\; , \;\; e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$

Ainsi sur $\mathbb{C}$:

$$X^4 + 1 = (X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X - e^{-3\frac{i\pi}{4}})(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}).$$

Pour obtenir la décompsition dans $\mathbb{R}$, on développe les deux produits correspondants aux racines conjuguées:

$$\begin{aligned}
(X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}) &= X^2 - 2\cos(\frac{\pi}{4})X + 1 \\
&= X^2 - \sqrt{2}X + 1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}) &= X^2 - 2\cos(\frac{3\pi}{4})X + 1 \\
&= X^2 + \sqrt{2}X + 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, sur $\mathbb{R}$:

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).$$

3. On trouve -1 et 2 comme racines évidentes.On peut alors diviser le polynôme par $(X+1)(X-2) = X^2 - X - 2$ et obtenir

$$X^4 - 2X^3 + X - 2 = (X+1)(X-2)(X^2 - X + 1)$$

le polynôme $X^2 - X + 1$ n'a pas de racines réelles: La factorisation sur $\mathbb{R}$ est donc

$$X^4 - 2X^3 + X - 2 = (X+1)(X-2)(X^2 - X + 1)$$

Ses racines complexes (calculées à l'aide de discriminant) sont $e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{-i\pi}{3}}$.
Donc la factorisation sur $\mathbb{C}$ est

$$X^4 - 2X^3 + X - 2 = (X+1)(X-2)(X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{\frac{-i\pi}{3}}).$$