SERIE 5

Exercice 1.

a) puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non-nuls et que $\overrightarrow{u}$ n'est pas proportionnel à $\overrightarrow{v}$, les deux vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ne sont pas clinéaire donc la famille des vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre.

b) On a $\overrightarrow{u}(1, 2, -1)$, $\overrightarrow{v}(1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{w}(-1, 2, -3)$

Pour montrer que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires ou pas, on doit vérifier si l'un des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire des deux autres.

Soit donc α et β tels que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} -1 & = & \alpha + \beta \quad (L_1) \\ 2 & = & 2\alpha \quad (L_2) \\ -3 & = & -\alpha + \beta \quad (L_3) \end{array}\right.$$

$(L_2) \Longrightarrow \alpha = 1$ et si on remplace la valeur de α dans (L_1) on trouve $\beta = -2$ et les valeurs de α et β vérifient bien l'équation (L_3). Par suite on a $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$ c'est à dite que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires et donc liés.

Exercice 2.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1.

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \mathcal{P} \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists (t, u) \in \mathbb{R}^2 \ \left| \ \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t + 2u \\ y = 2 + t + u \\ z = 3u \end{array}\right.\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists (t, u) \in \mathbb{R}^2 \ \left| \ \left\{\begin{array}{l} x - y = -1 + u \\ y = 2 + t + u \\ z = 3u \end{array}\right.\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists (t, u) \in \mathbb{R}^2 \ \left| \ \left\{\begin{array}{l} u = x - y + 1 \\ t = y - 2 - u = -x + 2y - 3 \\ z = 3u = 3x - 3y + 3 \end{array}\right.\right.
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan est donc $3x - 3y - z + 3 = 0$.

2. Il suffit de choisir deux coordonnées comme paramètres. On a

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \mathcal{P} \quad &\Longleftrightarrow \quad x = -2y + z + 3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = -2y + z + 3 \\ y = y \\ z = z \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Une représentation paramètrique de $\mathcal{P}$ est donc donnée par

$$\left\{\begin{array}{l} x = -2t + u + 3 \\ y = t \\ z = u. \end{array}\right.$$

3. La dernière équation donne $t = z - 3$. On remplace dans les deux autres pour trouver un système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 4z - 7 \\ y = 3z - 7 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 4z + 7 = 0 \\ y - 3z + 7 = 0. \end{array}\right.$$

4. On choisit une des coordonnées comme paramètres, on a

$$\begin{array}{rcl} (x, y, z) \in \mathcal{D} & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x + y - 3z + 1 = 0 \\ 2x + y - 5z = 0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x + y - 3z + 1 = 0 \\ x - 2z - 1 = 0 \quad (L_2 - L_1) \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x = 2z + 1 \\ y = -x + 3z - 1 = z - 2 \\ z = z \end{array}\right. \end{array}$$

Une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$ est donc donnée par

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = t. \end{array}\right.$$

Exercice 3.

Soit $\overrightarrow{u} = (1, 0, 5)$, $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{w} = (2, 1, 0)$.
On a

$$\begin{array}{rcl} det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) & = & < \overrightarrow{u}, (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) > \\ & = & < (1, 0, 5), (-1, 2, -3) > \\ & = & -1 + 0 - 15 \\ & = & -16 \neq 0 \end{array}$$

Donc $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $I\!R^3$.
Le volume paraléllépipède construit sur les vecteur $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ est donnée par

$$V = |det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| = 16.$$

Exercice 4.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, de coordonnées $(-3, 3, 0)$, ou encore, pour que les équations soient plus simples à écrire, le vecteur $(1, -1, 0)$ qui lui est colinéaire. Une équation de $\mathcal{P}$ est donc de la forme

$$x - y + d = 0,$$

et puisque A est élément du plan, on obtient

$$1 - 2 + d = 0 \Longrightarrow d = 1.$$

La perpendiculaire à P passant par M a pour vecteur directeur un vecteur normal du plan, comme $(1, 1, 0)$. Comme elle passe par M, elle admet pour équation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = u + t \\ y = vt \\ z = w. \end{array}\right.$$

L'intersection de cette droite et du plan $\mathcal{P}$ est le projeté orthogonal recherché. On introduit l'équation paramétrique de la droite dans celle du plan, et on trouve :

$$u+t-v+t+1=0 \Longrightarrow t=\frac{-u+v-1}{2}.$$

On en déduit les coordonnées de H :

$$\begin{aligned} x_H &= u+\frac{-u+v-1}{2}=\frac{u+v-1}{2} \\ y_H &= v-\frac{-u+v-1}{2}=\frac{u+v+1}{2} \\ z_H &= w. \end{aligned}$$

Exercice 5.

soient D_1 et D_2 les droites d'équation respective

$$D_1 \left\{ \begin{array}{l} x+y=2 \\ y-2z=3 \end{array} \right. \qquad D_2 \left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=a \end{array} \right.$$

1. Cherchons un vecteur directeur de (D_1) et de (D_2).
   (D_1) est défini comme intersection de deux plans.
   Un vecteur normal au premier plan est $\overrightarrow{n_1}=(1,1,0)$.
   Un vecteur normal au deuxième plan est $\overrightarrow{n_2}=(0,1,-2)$.
   Un vecteur directeur de (D_1) est alors

   $$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=(-2,2,1).$$

   De la même façon, on trouve qu'un vecteur directeur de (D_2) est $\overrightarrow{v}=(5,-2,-3)$.
   Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.
2. Puisque (D_1) et de (D_2) ne sont pas parallèles, elles sont coplanaires si et seulement si elles admettent un point d'intersection. Il faut donc que le système d'équation

   $$\left\{ \begin{array}{l} x+y=2 \\ y-2z=3 \\ x+y+z=1 \\ x-2y+3z=a \end{array} \right.$$

   admette une solution. Or, en retranchant la première équation à la troisième, on trouve que ce système est équivalent à :

   $$\left\{ \begin{array}{l} x+y=2 \\ y-2z=3 \\ x+y+z=1 \\ x-2y+3z=a \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ y=1 \\ z=-1 \\ -4=a. \end{array} \right.$$

   Les deux droites sont donc coplanaires si et seulement si $a=-4$. Dans ce cas, leur point d'intersection est $A(1,1,-1)$.
   Le plan qui contient les deux droites passe par A et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
   Un vecteur normal au plan est donc $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=(-4,-1,-6)$.
   Une équation du plan est donc de la forme

   $$4x+y+6z+d=0.$$

   En utilisant que A est un point du plan, on trouve finalement que le plan d'intersection de (D_1) et de (D_2) a pour équation

   $$4x+y+6z+1=0.$$

Exercice 6.

1. $\mathcal{P}$ est déterminé par le point $A(1,0,2)$ et les deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(2,1,1)$ et $\overrightarrow{v}(1,1,1)$. La distance de M au plan $\mathcal{P}$ est donc donnée par
$$d = \frac{|det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

2. On commence par chercher une reprÉsentation paramÉtrique de la droite. On a
$$\begin{aligned}(x,y,z) \in \mathcal{D} \quad &\iff \quad \begin{cases} x+y-3z+1=0 \\ 2x+y-5z=0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x+y-3z+1=0 \\ x-2z-1=0 \quad (L_2-L_1) \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x=2z+1 \\ y=-x+3z-1=z-2 \\ z=z \end{cases}\end{aligned}$$
Une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$ est donc donnée par
$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t-2 \\ z=t. \end{cases}$$
Un point de la droite est donc $A(1,-2,0)$ et un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}(2,1,1)$. La distance de M À la droite est alors
$$d = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}.$$

Exercice 7.

On muni l'espace d'un repère orthonormal $R(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère la sphère $\mathcal{S}$ d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-11=0$ ainsi que le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $3x-4z+19=0$.

1. On a :
$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z-11=0 \iff (x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=25.$$
Par conséquent $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1,-2,-3)$ et de rayon $R=5$.

2. Appliquant le cours :
$$d(\Omega,\mathcal{P}) = \frac{|3\times 1+4\times 3+19|}{\sqrt{3^2+4^2}=\frac{34}{5}} > 5.$$
L'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{S}$ est donc vide.

3. Un vecteur directeur à Δ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Par conséquent le vecteur $\overrightarrow{n}(3,0,-4)$ dirige Δ. Une équation paramétrique de Δ est donc :
$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=-2 \\ z=-3-4t \end{cases}$$

4. Les points de $\mathcal{S}$ à distance maximale et minimale de$\mathcal{P}$ sont les solutions du système :
$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=25 \\ x=1+3t \\ y=-2 \\ z=-3-4t \end{cases}$$

et sont donc : $M(-2,-2,1)$ et $N(4,-2,-7)$. Par suite :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|3\times(-2)-4\times(-2)+19|}{5} = \frac{21}{5}$$

et

$$d(N,\mathcal{P}) = \frac{|3\times 4-4\times(-2)+19|}{5} = \frac{39}{5}$$

Le point le plus près de P est donc M et le plus loin est N.

Exercice 8.

Soient a, b, c trois réels non nuls, et soient $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$

1. Une sphère a pour équation

$$(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2 = R^2.$$

Si on écrit que $0 \in \mathcal{S}$, on obtient

$$u^2+v^2+w^2 = R^2.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{S} &\implies (a-u)^2+v^2+w^2 = u^2+v^2+w^2 \\ &\implies u = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$B \in \mathcal{S} \implies v = \frac{b}{2}$$

$$C \in \mathcal{S} \implies w = \frac{c}{2}$$

L'équation de la sphère recherchée est donc

$$(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{b}{2})^2+(z-\frac{c}{2})^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}.$$

2. L'équation du plan $\mathcal{P}$ est de la forme

$$ux+vy+wz+t = 0.$$

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{P} &\implies ua+t = 0 \\ &\implies u = -\frac{t}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{P} &\implies vb+t = 0 \\ &\implies v = -\frac{t}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \in \mathcal{P} &\implies wc+t = 0 \\ &\implies w = -\frac{t}{c} \end{aligned}$$

Donc on remplaçant dans l'équation on trouve

$$-\frac{x}{a}t-\frac{y}{b}t-\frac{z}{c}t+t = 0$$

et donc

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1 = 0.$$

3. Le cercle recherché est l'intersection de la sphère et du plan.
Soit I le centre de la sphère, $I(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$, et J le projeté orthogonal de I sur le plan $\mathcal{P}$. Alors J est le centre de $\mathcal{C}$, et le rayon de $\mathcal{C}$ est la longueur JA.
Le triangle AJI est rectangle en J donc d'après le théorème de Pythagore :
$$AJ^2 = AI^2 - IJ^2.$$
Or, on sait que
$$AI^2 = R^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{4}$$
et que
$$IJ = dist(I, \mathcal{P}) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}} = \frac{abc}{2\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}.$$
On conclut que
$$AJ^2 = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2 - \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}).$$