Université Hassan II, Casablanca
Faculté des Sciences Ain Chock,
Département de Mathématiques
et Informatique

2015/2016
SMPC
Algèbre I

SERIE 2 (Correction)

Exercice 1.

1. Deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ sont colinéaires

$$\begin{aligned}&\Longleftrightarrow \exists k \neq 0 \ \text{ tel que } \ \overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}\\ &\Longleftrightarrow det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0.\end{aligned}$$

a) $\overrightarrow{u}(2,-3)$ et $\overrightarrow{v}(-1,\frac{3}{2})$, alors $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{i} + \frac{3}{2}\overrightarrow{j}$

$$\overrightarrow{u} = -2(-\overrightarrow{i} + \frac{3}{2}\overrightarrow{j}) = -2\overrightarrow{v}.$$

Donc $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ sont colinéaires.
Autre méthode: On a

$$det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 2 \times \frac{3}{2} - (-1)(-3) = 0$$

Donc $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ sont colinéaires.

b) $\overrightarrow{u}(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ et $\overrightarrow{v}(\frac{3}{4},\frac{4}{5})$:

$$det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = -\frac{1}{10} \neq 0$$

Donc $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ ne sont pas colinéaire.

2. Les bases suivantes sont-elles orthogonales? orthonormales?

a) $u = (1,2)$, $v = (-1,2)$:
On a $< u, v >= -1 + 4 = 3 \neq 0$, donc $\{u,v\}$ n'est pas une famille orthogonale.

b) $u = (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, $v = (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$:
$< u, v >= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ donc $\{u,v\}$ est orthogonale.
$\|u\| = \|v\| = 1 \Longrightarrow \{u,v\}$ est orthonormale.

Exercice 2.

1. Soient les points $A(-1,3)$, $B(7,-1)$, $C(4,2)$ et $D(0,4)$ dans un repère $(0,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.
Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$: $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-(-1) \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$
Les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$: $\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$
Calculons le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

$$det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 8 \times 2 - (-4) \times (-4) = 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, il en résulte que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Rq: On peut remarquer que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$.

2. Soit $\overrightarrow{u}(\sqrt{3},1)$, $\overrightarrow{v}(1,\sqrt{3})$.
   On sait que
   $$\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \frac{<\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}>}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
   et donc $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

   La surface S du parallélogramme formée sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est :
   $$S = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\sin\frac{\pi}{6} = 2\times 2\times\frac{1}{2} = 2$$
   ou
   $$S = |det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})| = |(\sqrt{3})^2 - 1| = 2$$

Exercice 3.

1. La droite D passant par $A(1,-2)$ et derigée par $\overrightarrow{u}(1,2)$ est l'ensemble:
   $$D = \{M \in I\!R^2 \mid \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires}\}$$
   donc
   $$\begin{aligned} M(x,y)\in D &\iff \exists\alpha\in I\!R \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u} \\ &\iff \exists\alpha\in I\!R \text{ tel que } \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} x = 1+\alpha \\ y = -2+2\alpha \end{array}\right. \end{aligned}$$
   C'est l'équation paramétrique de la droite D.
   On a $x = 1+\alpha$ et $y = -2+2\alpha$ donc
   $$x-1 = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{y+2}{2} = \alpha$$
   ce qui implique que
   $$x-1 = \frac{y+2}{2}$$
   et donc
   $$2x - y - 4 = 0$$
   n'est autre que l'équation cartésienne de la droite D.
2. La droite D passant par $A(2,-1)$ et ayant comme vecteur normal $\overrightarrow{n}(3,2)$ est l'ensemble:
   $$D = \{M \in I\!R^2 \mid\ <\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u}>= 0\}$$
   donc
   $$\begin{aligned} M(x,y)\in D &\iff <\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}>= 0 \\ &\iff 3(x-2)+2(y+1) = 0 \\ &\iff 3x+2y-4 = 0 \end{aligned}$$
   C'est l'équation cartésienne de la droite D.
   $\overrightarrow{n}(3,2)$ est le vecteur normal donc $\overrightarrow{u}(-2,3)$ est le vecteur qui dérige la droite D. Donc
   $$D = \{M \in I\!R^2 \mid \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires}\}$$

donc

$$\begin{aligned} M(x,y)\in D &\iff \exists\alpha\in I\!R \text{ tel que } \overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{u} \\ &\iff \exists\alpha\in I\!R \text{ tel que } \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = 2-2\alpha \\ y = -1+3\alpha \end{cases} \end{aligned}$$

C'est l'équation paramétrique de la droite D.

Exercice 4.

1. La deuxième équation nous donne $t = 1-y$, en remplaç dans la première, on trouve

   $$x = 3+2-2y.$$

   Une équation cartésienne est donc

   $$x+2y-5=0.$$

2. On a

   $$(x,y)\in D \iff \begin{cases} x = \frac{3}{2}y+2 \\ y = y \end{cases}$$

   Une représentation paramétrique de D est donc

   $$\begin{cases} x = \frac{3}{2}t+2 \\ y = t \end{cases}$$

3. Si (x,y) désignent les coordonnées cartésiennes et (r,θ) désignent les coordonnées polaire, on a $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, donc l'équation cartésienne devient en polaire

   $$2r\cos\theta - 3r\sin\theta = 4 \iff r = \frac{4}{2\cos\theta - 3\sin\theta}.$$

4. La droite a pour équation

   $$\sqrt{3}r\cos\theta + r\sin\theta = 2,$$

   soit

   $$\sqrt{3}x+y=2.$$

   Un vecteur directeur est donc le vecteur $\overrightarrow{u} = (-1,\sqrt{3})$, on a

   $$\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{i}) = \frac{<\overrightarrow{u},\overrightarrow{i}>}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{i}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   L'angle cherché est donc $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \bmod 2\pi$.

Exercice 5.

On commence par déterminer l'équation de la droite (AB). Le point $M(x,y)$ est élément de (AB) ssi $det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}) = 0$

$$\iff 4(y-1)+2(x+1)=0$$

$$\iff x+2y-1=0.$$

On détermine ensuite l'équation de la perpendiculaire à (AB) passant par C.
Le point $M(x,y)$ appartient à cette droite ssi $<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CM}>=0$

$$\iff 4(x-1)-2(y-4)=0$$

$$\iff 2x - y + 2 = 0.$$

Le point H est le point d'intersection de ces deux droites. On résoud le système

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

et on trouve $H(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Exercice 6.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1,2)$ et $B(2,3)$.

1. Soit $M(x,y)$ un point du plan. Il appartient à la droite (AB) si et seulement si $det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$, ce qui donne une équation cartésienne de la droite (AB) :

$$(AB) : 5x + 3y + 1 = 0.$$

2. Avec la formule du cours,

$$d(C,(AB)) = \frac{|5+3+1|}{\sqrt{5^2+3^2}} = \frac{9}{\sqrt{34}}.$$

3. Comme $\overrightarrow{n} = (5,3)$ est normal à (AB), il dirige (CH) et une équation paramétrique de (CH) est (CH) :

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$$

Les coordonnées de H sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 + 3t \\ 5x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

On trouve $t = -9/34$, $x = -11/34$ et $y = 7/34$. Donc $H(-\frac{11}{34}, \frac{7}{34})$.

4. Il suffit de calculer la norme de $\overrightarrow{CH} = (\frac{45}{34}, \frac{27}{34})$, on trouve $\|\overrightarrow{CH}\| = \sqrt{\frac{81}{34}} = \frac{9}{\sqrt{34}}$.

Exercice 7.

On a $\overrightarrow{e_1'} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $\overrightarrow{e_2'} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, on applique les formules de changement de repère. Si (x', y') sont les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} M \in H &\iff (\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y')^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y')^2 = 1 \\ &\iff \frac{1}{2}(x'-y')^2 - \frac{1}{2}(x'+y')^2 = 1 \\ &\iff -2x'y' = 1 \\ &\iff y' = -\frac{1}{2x'}. \end{aligned}$$

Exercice 8.

Si T_A est une tangente à $\mathcal{C}$ de centre Ω passant par A et si M est le point de contact alors $(\Omega M) \perp (AM)$, ainsi M est sur le cercle de diamètre $[\Omega A]$.

a) Le centre de $\mathcal{C}$ à pour coordonnés $\Omega(1,0)$. Le centre de diamtre $[\Omega A]$ a pour équation

$$
\begin{aligned}
<\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{AM}>=0 &\iff <\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}>=0\\
&\iff x^2+y^2-3x-3y+2=0
\end{aligned}
$$

Les points de contacts des tangentes issues de A ont pour coordonnées les solutions du système

$$
\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-2x+\frac{4}{5}=0 \\ x^2+y^2-3x-3y+2=0 \end{array}\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-2x+\frac{4}{5}=0 \\ -x-3y+\frac{6}{5}=0 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} (-3y+\frac{6}{5})^2+y^2-2(-3y+\frac{6}{5})+\frac{4}{5}=0 \\ x=-3y+\frac{6}{5} \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} 10y^2-\frac{6}{5}y-\frac{4}{25}=0 \\ x=-3y+\frac{6}{5} \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

On obtient deux solutions $M_1(\frac{3}{5},\frac{1}{5})$ et $M_2(\frac{36}{25},-\frac{2}{25})$ qui donnent deux tangentes:

$$
T_{M_1}: \begin{vmatrix} x-2 & \frac{3}{5}-2 \\ y-3 & \frac{1}{5}-3 \end{vmatrix} = -\frac{14}{5}x+\frac{7}{5}y+\frac{7}{5}=0
$$

$$
T_{M_1}: 2x-y=1
$$

$$
T_{M_2}: \begin{vmatrix} x-2 & \frac{36}{25}-2 \\ y-3 & -\frac{2}{25}-3 \end{vmatrix} = -\frac{77}{25}x+\frac{14}{25}y+\frac{112}{25}=0
$$

$$
T_{M_1}: 11x-2y=16
$$

b) Le centre de $\mathcal{C}$ à pour coordonnés $\Omega(1,1)$. L'équation du cercle de diamtre $[A,\Omega]$ est donc

$$
\begin{aligned}
<\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{AM}>=0 &\iff <\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}>=0\\
&\iff x^2+y^2-x-y=0
\end{aligned}
$$

Les points de contacts des tangentes issues de A ont pour coordonnées les solutions du système

$$
\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-2x-2y-2=0 \\ x^2+y^2-x-y=0 \end{array}\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-2x-2y-2=0 \\ x+y+2=0 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} (-y-2)^2+y^2-2(-y-2)-2=0 \\ x=-y-2 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} 2y^2+4y+6=0 \\ x=-y-2 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

n'a pas de solution (l'équation $y^2+2y+3=0$ a pour racines $-1\pm i\sqrt{2}$).

Rq: Le point A est à l'intérieur de $\mathcal{C}$, il n'y a pas de tangente à $\mathcal{C}$ issue de A.

Exercice 9.

On considère le cercle d'équation $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$ et la droite d'équation $\mathcal{D} : 5x + 2y - 13 = 0$
.

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre $\Omega(-2, 3)$ et pour rayon $R = \sqrt{30}$. Le diamètre passe par Ω et celui recherché ne peut être verticale car il est perpendiculaire à D. Il a donc pour équation cartésienne

$$y - 3 = m(x + 2),$$

c'est-à-dire

$$D_m : mx - y + (3 + 2m) = 0$$

Un vecteur normal à D_m est $\overrightarrow{n_m}(m, -1)$ et un vecteur normal à D est $\overrightarrow{n}(5, 2)$. Pour que les deux droites soient perpendiculaires, il faut et il suffit que $< \overrightarrow{n_m}, \overrightarrow{n} >= 0$, c'est-à-dire $m = \frac{2}{5}$. On trouve donc l'équation du diamètre :

$$2x - 5y + 19 = 0.$$

Exercice 10.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère deux points $A(1, 1)$ et $B(3, -1)$.

1. On trouve $D : x + y - 2 = 0$.
2. L'équation cartésienne réduite du cercle est

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 4$$

C'est donc le cercle de centre $\Omega(4, 5)$ et de rayon 2. La distance du centre Ω à la droite (AB) est donnée par :

$$d(\Omega, D) = \frac{|4 + 5 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}.$$

La distance du cercle à la droite est donc

$$d(D, \mathcal{C}) = d(\Omega, D) - R = \frac{7 - 2\sqrt{2}}{2}.$$