Université Hassan II, Casablanca
Faculté des Sciences Ain Chock,
Département de Mathématiques
et Informatique

2015/2016
SMPC
Algèbre I

SERIE 5 (Correction)

Exercice 1.

Ecrivons $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ avec P et Q deux polynômes premiers entre eux, avec Q unitaire. La condition $F(X)^2 = (X^2+1)^3$ devient $P^2 = (X2+1)^3 Q^2$. Ainsi Q^2 divise P^2. D'où $Q^2 = 1$, puisque P^2 et Q^2 sont premiers entre eux. Donc $Q = 1$ (ou -1). Ainsi $F = P$ est un polynôme et $P^2 = (X^2+1)^3$.
En particulier P^2 est de degré 6, donc P doit être de degré 3. Ecrivons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, on développe l'identité $P^2 = (X^2+1)^3$:

$$X^6 + 3X^4 + 3X^2 + 1 = a^2X^6 + 2abX^5 + (2ac + b^2)X^4 + (2ad + 2bc)X^3 + (2bd + c^2)X^2 + 2cdX + d^2.$$

On identifie les coefficients : pour le coefficient de X^6, on a $a = \pm 1$, puis pour le coefficient de X^5, on a $b = 0$; pour le coefficient de 1, on a $d = \pm 1$, puis pour le coefficient de X, on a $c = 0$. Mais alors le coefficient de X^3 doit vérifier $2ad + 2bc = 0$, ce qui est faux. Ainsi aucun polynôme ne vérifie l'équation $P^2 = (X^2+1)^3$, et par le raisonnement du début, aucune fraction non plus.

Exercice 2. Déterminer les zéros et les pôles des fractions rationnelles suivantes

1. $\frac{(X^2+X+1)(X-1)^2X}{(X-2)(X^2+1)(X+1)^4}$:
   Les zéros sont : 0, 1 de multiplicité 2, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
   Les pôles sont : 2, i, -i et -1.
2. $\frac{X^4-16}{X^2-3X-2}$:
   Les zéros sont : 2, -2, $4i$ et $-4i$:
   Les pôles sont : $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$.
3. Déterminons les racines communes à $X^p - 1$ et $X^q - 1$. Soit w un telle racines. On a $w^p = w^q = 1$. Puisque p et q sont premiers entre eux, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $pu + qv = 1$.
   On a alors $w = w^{pu+qv} = (w^p)^u (w^q)^v = 1$. Inversement, 1 est racine commune. De plus, notons que toutes les racines de $X^p - 1$ et $X^q - 1$ sont simples. Les racines de $\frac{X^p-1}{X^q-1}$ sont les racines p ème de l'unité autres que 1. Elles sont simples. Les pôles de F sont les racines q ème de l'unité autres que 1. Ils sont simples. 1 n'est ni pôle, ni racine.

Exercice 3. Déterminer les partie entieres des fractions rationnelles suivantes

1. $F_1 = \frac{X}{X^2-4}$:
   Le degré de X est strictement inferieur au degré de $X^2 - 4$, donc la partie entiere du fraction rationnelle est E=0

   $F_2 = \frac{X^5+1}{X(X-1)^2}$:
   En faisant la division euclidienne de X^5+1 par $X(X-1)^2$, on trouve que la partie entiere du fraction rationnelle est $E = X^2 + 2X + 5$.

2. $F_3 = \frac{4X^3}{(X^2-1)^2}$:
   Le degré de $4X^3$ est strictement inferieur au degré de $(X^2-1)^2$, donc la partie entiere du fraction rationnelle est E=0

$F_4 = \frac{X^3+3X^2+3X+4}{X^2+2X+1}$:
En faisant la division euclidienne de X^3+3X^2+3X+4 par X^2+2X+1, on trouve que la partie entiere du fraction rationnelle est $E = X+1$.

Exercice 4.

1. $\frac{1}{X^3-X}$:
La partie entière est nulle, et le dénominateur se factorise en $X(X-1)(X+1)$. Donc

$$\frac{1}{X^3-X} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}.$$

En multipliant par X les deux membres et en faisant $X=0$, on trouve

$$\frac{1}{0-1} = a \quad \text{donc} \quad a = -1$$

de même en multipliant les deux membres par $X-1$ et en posant $X=1$, on trouve

$$\frac{1}{1\times(1+1)} = b \quad \text{donc} \quad b = \frac{1}{2}$$

et de même $c = \frac{1}{2}$.
On trouve finalement

$$\frac{1}{X^3-X} = -\frac{1}{X} + \frac{\frac{1}{2}}{X-1} + \frac{\frac{1}{2}}{X+1}.$$

2. $\frac{2X^2+1}{(X^2-1)^2}$:
Le dénominateur se factorise en $(X^2-1)^2 = (X-1)^2(X+1)^2$. Donc la fraction rationnelle peut se décomposer sous la forme

$$\frac{2X^2+1}{(X^2-1)^2} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{(X-1)^2} + \frac{\lambda_3}{X+1} + \frac{\lambda_4}{(X+1)^2}$$

Multipliant cette ÃľgalitÃľ par $(X-1)^2$ et par $(X+1)^2$ et faisant $X=+1$ et $X=-1$, on trouve

$$\frac{2+1}{(1+1)^2} = \lambda_2 \Longrightarrow \lambda_2 = \frac{3}{4}$$

et

$$\frac{2+1}{(-1-1)^2} = \lambda_4 \Longrightarrow \lambda_4 = \frac{3}{4}$$

On calculant ensuite

$$\frac{2X^2+1}{(X^2-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{(X-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}}{(X+1)^2} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_3}{X+1}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(X-1)(X+1)} = \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_3}{X+1}$$

On multipliant cette fois par $X-1$ et $X+1$ et on posant $X=+1$ et $X=-1$, on trouve

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \lambda_3 = -\frac{1}{4}.$$

On en déduit que

$$\frac{2X^2+1}{(X^2-1)^2} == \frac{\frac{1}{4}}{X-1} + \frac{\frac{3}{4}}{(X-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{X+1} + \frac{\frac{3}{4}}{(X+1)^2}.$$

3. $\frac{X^4-X+2}{(X-1)(X^2-1)}$:
   Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, il faut diviser $X^4 - X + 2$ par $(X-1)(X^2-1) = X^3 - X^2 - X + 1$. Donc

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^4 & & -X & +2 & X^3 \; -X^2 \; -X \; +1 \\ \cline{5-5}
X^4 \; -X^3 & -X^2 & +X & & X \quad +1 \\ \cline{1-3}
X^3 & +X^2 & -2X & +2 & \\
X^3 & -X^2 & -X & +1 & \\ \cline{1-4}
 & +2X^2 & -X & +1 &
\end{array}$$

   donc
$$\frac{X^4 - X + 2}{(X-1)(X^2-1)} = X + 1 + \frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)(X^2-1)}.$$
   On pose
$$G(X) = \frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)(X^2-1)} = \frac{a}{X^2-1} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$$
   je multiplie par $(X-1)^2$ puis $X = 1$
$$a = \left[\frac{2X^2 - X + 1}{X+1}\right]_{X=1} = \frac{2}{2} = 1$$
   je multiplie par $(X+1)$ puis $X = -1$
$$c = \left[\frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)^2}\right]_{X=-1} = \frac{4}{4} = 1$$
   Je multiplie par X, puis tendre X vers l'infini
$$2 = b + c \quad \text{donc} \quad b = 1.$$
   donc
$$\frac{X^4 - X + 2}{(X-1)(X^2-1)} = X + 1 + \frac{1}{X^2-1} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}.$$

4. $\frac{6X^3+3X^2-5}{X^4-1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1} &= \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} \\
&= \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}.
\end{aligned}$$
   Je multiplie par $X - 1$ puis $X = 1$
$$a = \left[\frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X+1)(X^2+1)}\right]_{X=1} = \frac{6+3-5}{2 \times 2} = 1.$$
   Je multiplie par $X + 1$ puis $X = -1$
$$b = \left[\frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X^2+1)}\right]_{X=-1} = \frac{-6+3-5}{-2 \times 2} = 2.$$
   Je multiplie par X, puis tendre X vers l'infini
$$b = a + b + c \quad \text{donc} \quad c = 6 - 1 - 2 = 3$$
   et
$$X = 0 \Longrightarrow 5 = -5 + b + d \quad \text{donc} \quad d = 5 + 1 - 2 = 4.$$
   Donc
$$\frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{3X+4}{X^2+1}.$$

Exercice 5.

1. $\frac{X}{(X+i)^2}$:

$$\frac{X}{(X+i)^2}=\frac{a}{X+i}+\frac{b}{(X+i)^2}$$

On multiplie par $(X+i)^2$ et puis $X=-i$

$$a=[X]_{X=-i}=b\Longrightarrow b=-i$$

donc

$$\frac{X}{(X+i)^2}+\frac{i}{(X+i)^2}=\frac{a}{X+i}$$

ce qui implique

$$\frac{1}{X+i}=\frac{a}{X+i}\Longrightarrow a=1.$$

Par suite

$$\frac{X}{(X+i)^2}=\frac{1}{X+i}-\frac{i}{(X+i)^2}.$$

2. $\frac{X+i}{X^2+i}$:
On doit chercher les pôles de X^2+i sont les zéros du $X^2=-i=e^{\frac{i3\pi}{2}}$

$$X=e^{i(\frac{3\pi}{4}+k\pi)},\quad k=0,1$$

donc

$$X_1=e^{\frac{i3\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{et}\quad X_2=e^{\frac{i7\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi

$$X^2+i=(X+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})(X-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})$$

et

$$\frac{X+i}{X^2+i}=\frac{a}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{b}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$a=\left[\frac{X+i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]_{X=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i$$

et

$$b=\left[\frac{X+i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]_{X=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i.$$

On en déduit

$$\frac{X+i}{X^2+i}=\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

3. $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$:
Le degré de numérateur est superieur au degré du dénominateur donc il faut déviser

$$\begin{array}{r|l} X^5\ +X\ +1 & X^4\ -1 \\ \cline{2-2} X^5\ -X\qquad & X \\ \hline 2X\ +1 & \end{array}$$

donc

$$X^5+X+1=X(X^4-1)+2X+1.$$

Ainsi

$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1}=X+\frac{2X+1}{X^4-1}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{2X+1}{X^4-1} &= \frac{2X+1}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} \\ &= \frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{cX+d}{X^2+1}.\end{aligned}$$

On multiplie simultanement par $X-1$, $X+1$ et X^2+1 puis on pose $X=1$, $X=-1$ $X=i$ et $X=-i$, on aura

$$\left[\frac{2X+1}{(X+1)(X^2+1)}\right]_{X=1} = a \Longrightarrow a = \frac{2+1}{2\times 2} = \frac{3}{4}$$

$$\left[\frac{2X+1}{(X-1)(X^2+1)}\right]_{X=-1} = b \Longrightarrow b = \frac{-2+1}{-2\times 2} = \frac{1}{4}$$

$$\left[\frac{2X+1}{X^2-1}\right]_{X=i} = ci+d \Longrightarrow -i-\frac{1}{2} = ci+d$$

$$\Longrightarrow c=-1 \quad \text{et} \quad d=-\frac{1}{2}$$

par suite

$$\frac{2X+1}{X^4-1} = \frac{\frac{3}{4}}{X-1}+\frac{\frac{1}{4}}{X+1}-\frac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1}.$$

On sait que $X^2+1=(X-i)(X+i)$ donc

$$\frac{X+\frac{1}{2}}{X^2+1} = \frac{\alpha}{X-i}+\frac{\beta}{X+i}$$

On multiplie simultanement par $X-i$, et on pose $X=i$, puis par $X+i$ et on pose $X=-i$, on aura

$$\left[\frac{X+\frac{1}{2}}{X+i}\right]_{X=i} = \alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{i+\frac{1}{2}}{2i} \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}i$$

et

$$\left[\frac{X+\frac{1}{2}}{X-i}\right]_{X=-i} = \beta \Longrightarrow \beta = \frac{-i+\frac{1}{2}}{-2i} \Longrightarrow \beta = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}i$$

et finalement

$$\frac{X^5+X+1}{X^4-1} = X+\frac{\frac{3}{4}}{X-1}+\frac{\frac{1}{4}}{X+1}-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X-i}-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X+i}.$$

4. $\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}$:

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{aX+b}{X^2+X+1}+\frac{c}{X-1}+\frac{d}{(X-1)^2} \qquad (*)$$

on multiplie par $(X-1)^2$ puis $X=1$

$$d = \left[\frac{3}{X^2+X+1}\right]_{X=1} = 1.$$

On sait que $X^2+X+1=(X-j)(X-j^2)$, on multiplie par X^2+X+1 puis $X=j$

$$\begin{aligned}aj+b &= \left[\frac{3}{(X-1)^2}\right]_{X=j} = \frac{3}{(j-1)^2} = \frac{3}{j^{-}2j+1} \\ &= \frac{3}{-3j} = -\frac{1}{j} = -j^2 = 1+j\end{aligned}$$

donc $b=1$ et $a=1$.
On prend $X=0$ dans (*)

$$3 = b-c+d \Longrightarrow c = -3+b+d = -3+1+1 = -1$$

et donc
$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$
Et comme $X^2+X+1 = (X-j)(X-j^2)$, on a
$$\frac{X+1}{X^2+X+1} = \frac{A}{X-j} + \frac{\overline{A}}{X-j^2}$$
on multiplie par $X-j$, puis $X=j$ on a
$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{X+1}{X-j^2}\right]_{X=j} = \frac{j+1}{j-j^2} = \frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$
$$\frac{X+1}{X^2+X+1} = \frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j} + \frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j^2}$$
et finalement
$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j} + \frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X-j^2} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}.$$

Exercice 6. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes.
$$\frac{1}{X^n-1}, \quad \frac{X^{n-1}}{X^n-1}.$$

1. Les pôles de $\frac{1}{X^n-1}$ sont les racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire les complexes
$$xk = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{0,\dots,n-1\}.$$
Chaque pôle est simple, la partie polaire correspondante est donc de la forme $\frac{\lambda_k}{X-\xi_k}$ avec
$$\lambda_k = \frac{1}{B'(\xi_k)} = \frac{1}{n\xi_k^{n-1}}.$$
Or,
$$\xi_k^{n-1} = \frac{\xi_k^n}{\xi_k} = \frac{1}{\xi_k} = e^{-\frac{2ik\pi}{n}}.$$
La décomposition en éléments simples est
$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}.$$

2. Les racines de X^n-1 sont les complexes
$$\xi_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, 0 \le k \le n-1.$$
La fraction rationnelle admet donc n pôles, qui sont tous simples. Sa décomposition en éléments simples a pour forme
$$\frac{X^{n-1}}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_k}{X-\xi_k}$$
avec
$$\alpha_k = \frac{A(\xi_k)}{B'(\xi_k)} = \frac{\xi_k^{n-1}}{n\xi_k^{n-1}} = \frac{1}{n}.$$
La décomposition en éléments simples est
$$\frac{X^{n-1}}{X^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{X-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}.$$