SMPC

Université Hassan II Casablanca

Examen : Algèbre 1

Année 2016/2017

Exercice 1 (8 points)

On considère le polynôme $P(Z) = Z^3 + 2(\sqrt{2}-1)Z^2 + 4(1-\sqrt{2})Z - 8$

1. Calculer $P(2)$ et en déduire une factorisation en produit des polynômes irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$. (1,5 pts)
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $P(Z) = 0$. (1,5 pts)

   Soient Z_1 et Z_2 les solutions non rélles de (E) tel que $Im\, Z_1 > 0$.
3. Déterminer le module et l'argument de Z_1. (1 pts)

   Dans le plan complexe $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives 2, Z_1 et Z_2.
4. Placer les points A, B et C dans le plan complexe. (0,5 pts)
5. Déterminer l'affixe Z_I du milieu I de $[AB]$. (0,5 pts)
6. Vérifier que le triangle OAB est isocèle en O. (1 pts)
7. En déduire une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OI}})$. (1 pts)
8. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{3\pi}{8})$ et $\sin(\frac{3\pi}{8})$. (1 pts)

Exercice 2 (6,5 points)

On considère les deux polynômes suivants de $\mathbb{R}[X]$

$$P = X^2 + X + 1 \quad \text{et} \quad Q = X$$

1. Montrer que P est irreductible dans $\mathbb{R}[X]$. (1 pts)
2. Vérifier que $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une racine de P et en déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$. (1 pts)
3. Montrer que $P \wedge Q = 1$. (1 pts)
4. Trouver deux polynômes U et V dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $UP + VQ = 1$. (1,5 pts)
5. Décomposer la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(X^2+X+1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ avec deux méthodes différentes. (2 pts)

Exercice 3 (5,5 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(1;1)$, $B(3;3)$ et le vecteur $\vec{n}(1;1)$

1. Donner une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. (1 pts)
2. On considère le point $\Omega(2;2)$. Vérifier que $\Omega \notin (D)$. (0,5 pts)
3. Déterminer l'équation du cercle C de centre Ω et tangent à la droite (D). (1,5 pts)
4. Montrer que A est le projeté orthogonal de Ω sur (D). (1 pts)
5. Soit $M(x;y) \in C$. Montrer que $< \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} >= 0$. (1,5 pts)