SMPC

Université Hassan II Casablanca

Examen : Algèbre I

Année: *2014/2015*

Exercice 1

Soit $Z = -\frac{3}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}})$

1. Calculer Z^2 et en déduire une écriture exponentielle.
2. En déduire une forme exponentielle de Z.
3. Donner alors $\cos(\frac{5\pi}{8})$ et $\sin(\frac{5\pi}{8})$.

Exercice 2

On considère l'équation (E) $\quad z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$

1. (a) Déterminer le réel y tel que iy soit solution de (E)
   (b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$$

2. Résoudre l'équation (E).
3. Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $z_A = i$, le point B d'affixe $z_B = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et C d'affixe z_C le symétrique de B par rapport l'axe des abscisses.
   (a) Déterminer z_C.
   (b) Calculer les longueurs AB et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(-1;2)$ et $B(2;3)$

1. Ecrire une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer la distance du point $C(1;-3)$ à la droite (AB).
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
4. Retrouver la distance du point C à la droite (AB), en utilisant 3^o)

Exercice 4

1. (D) est la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ non nul. Si M est un point de l'espace alors la distance de M à (D) est $d(M, D) = ...?$
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, compléter α est une racine d'ordre m de $P \Longleftrightarrow$ ....
   $\Longleftrightarrow$ ....
   $\Longleftrightarrow$ ....

Bonus

1. Factoriser le polynôme $P = X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X+1}{(X-1)(X+2)^2}$