Corrigé de l'épreuve d'algèbre 1 (Rattrapage)

2015 / 2016

Exercice 1 :

On considère le polynôme $P = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$

1/ Comme $P(3) = P'(3) = 0$ et que $P''(3) \neq 0$

alors 3 est une racine double de P.

2/

P est donc de la forme $P = (X-3)^2(aX^2 + bX + c)$

* $P(0) = 9 \Rightarrow \boxed{c = 1}$
* $P(1) = 12 \Rightarrow 4(a+b+1) = 12$
  $\Rightarrow a + b = 2$
* $P(-1) = 16 \Rightarrow 16(a-b+1) = 16$
  $\Rightarrow a - b = 0$

donc du fait que $\begin{cases} a+b = 2 \\ a-b = 0 \end{cases}$ on déduit que $\boxed{a = b = 1}$

et par conséquent $P = (X-3)^2(X^2 + X + 1)$

3/

les racine de $X^2 + X + 1$ sont.

son discriminant est $\Delta = 1^2 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$

donc $X^2 + X + 1$ a pour racines $X = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $X = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

donc les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont :

$x_1 = 3$ racine double et deux racine simples conjuguées

$x_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $x_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice 2 :

Soit $P(z) = z^3 - 4(1+i)z^2 - 2(1-4i)z + 12$

1/ on a $P(2) = 2^3 - 4(1+i)2^2 - 2(1-4i)2 + 12$

$= 8 - 16(1+i) - 4(1-4i) + 12$

$= \underbrace{8 - 16 - 4 + 12}_{=0} + i(\underbrace{-16 + 16}_{=0})$

$= 0$

2/ $P(2) = 0$ implique que $z - 2$ divise $P(z)$

donc en faisant la division euclidienne de $P(z)$ sur $z-2$ on a :

$$\begin{array}{l|l} z^3 - 4(1+i)z^2 - 2(1-4i)z + 12 & z - 2 \\ \cline{2-2} z^3 - 2z^2 & z^2 + (-2-4i)z - 6 \\ \hline (-2-4i)z^2 - 2(1-4i)z + 12 & \\ (-2-4i)z^2 + (4+8i)z & \\ \hline -6z + 12 & \\ -6z + 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

donc $P(z) = (z-2)(z^2 - 2(1+2i)z - 6)$

3/ (E) $z^2 - 2(1+2i)z - 6 = 0$ a pour discriminant

$\Delta = (2(1+2i))^2 - 4\times(-6) = 4(1-4+4i) + 24 = 12 + 16i = 4(3+4i)$

on cherche le complexe $\delta = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\delta^2 = \Delta$:

$\delta^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 12 + 16i$ et $|\delta|^2 = |\Delta|$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 12 \\ \alpha\beta = 8 \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{(12)^2 + (16)^2} = \sqrt{400} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 16 \\ \alpha\beta = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \text{ ou } -4 \\ \alpha\beta = 8 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = -2 \end{cases}$

donc $D = (4+2i)^2$ et les solution de (E) sont

$$z_1 = \frac{2(1+2i)-(4+2i)}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2(1+2i)+(4+2i)}{2}$$

$$= -1+i \qquad\qquad = 3(1+i)$$

4/ on a $z_1 = -1+i$ or $|z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

donc $z_1 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}$

$z_2 = 3(1+i)$ or $|z_2| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

donc $z_2 = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

5/ $$\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^4 = \left(\frac{3\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}\, e^{i3\pi/4}}\right)^4 = 3^4 e^{4i(\pi/4 - 3\pi/4)} = 81\, e^{4i\pi/2} = 81 e^{-2i\pi} = 81$$

6/ $AB = |z_1 - z_0| = |-3+i| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$

$AC = |z_2 - z_0| = |1+3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

$$\widehat{BAC} = \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right) = \arg\left(\frac{1+3i}{-3+i}\right) \text{ or } \frac{(1+3i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{-10i}{10} = -i = e^{-i\pi/2}$$

$\widehat{BAC} = -\pi/2\ [2\pi]$

$\Rightarrow$ donc le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Exercice 3

$(P) : x - 2y - 2z = 0$ et $(G) : (2x + 2y - z) = 0$

1/ les vecteurs normaux aux plans (P) et (G) sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

c'est deux vecteur ne sont pas colinéaire et donc les plans (P) et (G) ne sont pas parallèle et par conséquent ils se coupent selon une droite (D) dont l'équation cartesienne est:

$$(D) : \begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

2/ le vecteur directeur de (D) est définie par $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$

3/ soit (R) le plan passant par $A(1, -5, 1)$ et orthogonal à (P) et à (G)

donc (R) a pour vecteur normal $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$

par suite l'equation cartesienne de (R) et de la forme

$(R) : 6x - 3y + 6z + c = 0$

comme $A(1, -5, 1) \in R$ alors $6\times(1) - 3(-5) + 6(1) + c = 0$

$\Rightarrow c = -27 \Rightarrow 6x - 3y + 6z - 27 = 0$

$\boxed{3}$

par conséquent l'équation cartesienne de (R) est $2x - y + 2z - 9 = 0$

4/ soit (D) la droite passant par $B(1, 0, -1)$ et parallèle à (D)

donc (D) a pour vecteur directeur $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ et par suite

l'equation parametrique de (D) est

$$(D) : \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -3t \\ z = -1 + 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

soit $M\begin{pmatrix}x_M\\y_M\\z_M\end{pmatrix} \in (D)$ donc $\begin{cases} x_M = 1 + 6t \\ y_M = -3t \\ z_M = -1 + 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

-5t-or $d(M,P) = \dfrac{|x_M - 2y_M - 2z_M|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \dfrac{|x_M - 2y_M - 2z_M|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|x_M-2y_M-2z_M|}{3}$

$= \dfrac{|1+6t+6t+2-12t|}{3} = \dfrac{|3|}{3} = 1$

et $d(M,Q) = \dfrac{|2x_M+2y_M - z_M|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \dfrac{|2x_M+2y_M-z_M|}{3}$

$= \dfrac{|2+12t-6t+1-6t|}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

par conséquent $\forall M \in (D)$, $d(M,P) = d(M,Q) = 1$.