Corrigé de l'épreuve d'algèbre 1 — 2015 / 2016

Exercice 1 : Soit $P(z) = z^3 + (3-\sqrt{3})z^2 + (6-2\sqrt{3})z + 4 - 4\sqrt{3}$

1/ $P(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3}-1)^3 + (3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)^2 + (6-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) + 4 - 4\sqrt{3}$

$= (\sqrt{3})^3 + 3(\sqrt{3})^2(-1) + 3\sqrt{3}(-1)^2 + (-1)^3 + (3-\sqrt{3})(4-2\sqrt{3}) + 6\sqrt{3} - 6 - 2\sqrt{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4 - 4\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} - 9 + 3\sqrt{3} - 1 + 12 - 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{3} - 6 - 6 + 2\sqrt{3} + 4 - 4\sqrt{3}$

$= (3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) + (-9 - 1 + 12 + 6 - 6 - 6 + 4)$

$= 0$

2/ $P(z) = 0$

puisque $P(\sqrt{3}-1) = 0$ donc $z - (\sqrt{3}-1)$ divise $P(z)$

on effectuons la division euclidienne de $P(z)$ et $z - (\sqrt{3}-1)$

$$
\begin{array}{l|l}
z^3 - (3-\sqrt{3})z^2 + (6-2\sqrt{3})z + 4 - 4\sqrt{3} & z - \sqrt{3} + 1 \\
z^3 + (1-\sqrt{3})z^2 & z^2 + 2z + 4 \\
\hline
\quad 2z^2 + (6-2\sqrt{3})z + 4 - 4\sqrt{3} & \\
\quad 2z^2 + (2-2\sqrt{3})z & \\
\hline
\qquad 4z + 4 - 4\sqrt{3} & \\
\qquad 4z - 4\sqrt{3} + 4 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$z^3 + (3-\sqrt{3})z^2 + (6-2\sqrt{3})z + 4 - 4\sqrt{3} = (z - \sqrt{3} + 1)(z^2 + 2z + 4)$

donc $z^3 + (3-\sqrt{3})z^2 + (6-2\sqrt{3})z + 4 - 4\sqrt{3} = 0 \Rightarrow z - \sqrt{3} + 1 = 0$ ou $z^2 + 2z + 1 = 0$

donc $P(z) = 0 \Rightarrow z - \sqrt{3} + 1 = 0$ ou $z^2 + 2z + 1 = 0$

$\Rightarrow z = \sqrt{3} - 1$ ou $z^2 + 2z + 1 = 0$

le discriminant de $z^2 + 2z + 1 = 0$ est $D = 2^2 - 4 \times 4 = -12 = (i2\sqrt{3})^2$

donc $z^2 + 2z + 4 = 0$ a deux racines complexes

$z_1 = -\frac{2 + i2\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = -\frac{2 - i2\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$

donc les solutions de $P(z) = 0$ sont $z_1 = \sqrt{3} - 1$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$

3/ les solutions sous forme trigonométrique

$z_1 = (\sqrt{3}-1)e^{i0}$, $z_2 = 2e^{i2\pi/3}$, $z_3 = 2e^{-i2\pi/3}$

4/ Calculer AB, AC et $\widehat{BAC}$

$AB = |z_B - z_A| = |-1 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1| = |-\sqrt{3} + i\sqrt{3}| = \sqrt{6}$

$AC = |z_C - z_A| = |-1 - i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 1| = |-\sqrt{3} - i\sqrt{3}| = \sqrt{6}$

on a $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{-\sqrt{3} - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i\sqrt{3}} = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i}{2} = i = e^{i\pi/2}$

donc $(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) = \pi/2$

d'où $B\hat{A}C = \pi/2$ et le triangle est isocèl rectangle

5/ on a $\dfrac{z_B - z_A}{z_B} = \dfrac{-\sqrt{3} + i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}} = \dfrac{(-\sqrt{3} + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})}{(-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3} + 3}{1+3}$

$= \dfrac{3+\sqrt{3}}{4} + i\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\right)$

on a $z_B - z_A = -\sqrt{3} + i\sqrt{3} = \sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \sqrt{6}\, e^{i3\pi/4}$

et $z_B = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\, e^{i2\pi/3}$

donc $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_B}\right) = \arg(z_B - z_A) - \arg(z_B) = \frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \pi/12$

6/ En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$

On a $\dfrac{z_B - z_A}{z_B} = \dfrac{\sqrt{6}\, e^{i3\pi/4}}{2\, e^{i2\pi/3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} e^{i\pi/12} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \cos\dfrac{\pi}{12} + i\dfrac{\sqrt{6}}{2} \sin\dfrac{\pi}{12}$

or on a calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_B} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4} + i\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}\right)$

donc $\dfrac{\sqrt{6}}{2} \cos\pi/12 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ et $\dfrac{\sqrt{6}}{2} \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$

ce qui implique que $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\pi/12 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Exercice 2 :

1/ Equation cartesienne de la droite (D) passant par $A(2,-4)$ et dirigée par $\vec{u}(1,0)$ est de la forme $0x - 1y + c = 0$ or $A(2,-4) \in D$

donc $0\times 2 - 1(-4) + c = 0 \Rightarrow c = -4$

Alors l'equation cartésienne de (D) est $-y - 4 = 0 \Rightarrow \underline{y = -4}$

2/ On a $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \iff (x-2)^2 + (y+1)^2 - 4 - 1 - 4 = 0$

$\iff (x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2$

donc l'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ est un cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(2,-1)$ et de rayon $R = 3$.

3/ Pour montrer que la droite (D) est tangente au cercle C il suffit de montrer que la distance entre D et le centre du cercle C est égal au rayon du cercle donc $D(\Omega, D) = \dfrac{|(-1)\times 1 + 4|}{\sqrt{0^2+1^2}} = 3 = R$

ce qui implique que la droite (D) est tangente au cercle C.

4/ D est tangente au cercle C au point $M(x,y)$ vérifie $(\Omega M) \perp (BM)$

ainsi M est sur le cercle de diamètre $[\Omega B]$.

Le cercle de diametre $[\Omega B]$ a pour équation

$$\langle \vec{\Omega M}, \vec{BM} \rangle = 0 \iff \left\langle \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+3 \\ y+4 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\iff (x-2)(\ +\ ) + (y+1)(y+4) = 0$$

$$\iff x^2+y^2+x+5y-2=0$$

Les points de contacts des tangents issues de B ont pour coordonnés les solutions du système

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-4=0 \\ x^2+y^2+x-5y-2=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-4=0 \\ 5x+3y+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-4=0 \\ x=-\frac{3}{5}y-\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \left(-\frac{3}{5}y-\frac{2}{5}\right)^2+y^2-4\left(-\frac{3}{5}y-\frac{2}{5}\right)+2y-4=0 \\ x=-\frac{3}{5}y-\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 17y^2+61y-28=0 & \Rightarrow y=-4 \text{ ou } y=7/17 \\ x=-\frac{3}{5}y-\frac{2}{5} & \Rightarrow x=2 \text{ ou } x=-11/17 \end{cases}$$

on obtient deux solution $M_1(2,-4)$ ou $M_2\left(\frac{-11}{17}, \frac{7}{17}\right)$ qui donne deux tangentes

$$T_{M_1} : \begin{vmatrix} x+3 & 2+3 \\ y+4 & -4+4 \end{vmatrix} = 5(y+4) = 0 \Rightarrow \boxed{y=-4}$$

et $$T_{M_2} : \begin{vmatrix} x+3 & \frac{-11}{17}+3 \\ y+4 & \frac{7}{17}+4 \end{vmatrix} = \frac{75}{17}(x+3) - \frac{40}{17}(y+4) = 0$$

$$\boxed{T_{M_2} : 15x-8y+13=0}$$

<u>Exercice 3</u> :

1/ (a) calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc a pour equation cartésienne $x-2y+2z+c=0$

Comme $A \in (ABC)$ donc $-3+c=0 \Rightarrow \underline{c=3}$

et par conséquent l'équation cartésienne du plan (ABC) est $\boxed{x-2y+2z+3=}$

5

2) (a) l'équation cartesienne de la sphère S de centre Ω et de rayon 2 est

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-0)^2=2^2 \iff x^2+y^2+z^2-2x+2y=2$

donc l'équation cartesienne de la sphère S est $\boxed{x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0}$

(b) on a $D(\Omega,(ABC)) = \dfrac{|1\times 1-2(-1)+2\times(0)+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{9}} = 2 = R$

donc le plan (ABC) est tangent à la sphère S.

3) Soit (Q) le plan d'équation $2x+2y+z+3=0$

(a) le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

" (Q) " " " $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

et $<\vec{n},\vec{n}'> = 1\times 2-2\times 2+2\times 1=0$

$\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux donc les deux plans (Q) et (ABC) sont orthogonaux.

(b) $D(\Omega,Q) = \dfrac{|2\times 1+2(-1)+1\times 0+3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{9}} = 1 < 2$

donc $Q\cap S$ est un cercle de rayon $\sqrt{R^2-d^2(\Omega,Q)} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

et de centre H le projeté orthogonal de Ω sur Q

(c) l'équation paramétrique de la droite (D) passant par Ω et perpendiculaire à (Q) :

$M\in D \Rightarrow \vec{\Omega M} = \lambda\vec{n}'$

$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2\lambda \\ y+1 = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

(d) on a $H(x,y,z)\in Q \Rightarrow 2(1+2\lambda)+2(-1+2\lambda)+\lambda+3=0$

$\Rightarrow 9\lambda+3=0$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$

et par conséquent $H=(\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{1}{3})$.

donc $Q\cap S$ est un cercle de centre $H(\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{1}{3})$ et de rayon $\sqrt{3}$

Exercice 4 :

1) $P = X^4+1$. $P(X)=0 \iff X^4-1=0$

$\iff X^4=-1=e^{i\pi}$

donc $X^4=-1$ a pour racine $X_k = e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4})}$, $k\in\{0,1,2,3$

et par suite

$$X^4+1=(X-e^{i\pi/4})(X-e^{-i\pi/4})(X-e^{i3\pi/4})(X-e^{-i3\pi/4}).$$

dans $\mathbb{R}[X]$

$$X^4+1=(X^2-(e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4})X+1)(X^2-(e^{i3\pi/4}+e^{-i3\pi/4})X+1)$$

$$=(X^2-2\cos\tfrac{\pi}{4}X+1)(X^2-2\cos\tfrac{3\pi}{4}X+1)$$

$$=(X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$$

2/ Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X)=\frac{X+1}{(X-1)(X^2+1)}$$

on a $\quad F(X)=\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{bX+c}{X^2+1}$ en effet

on multiplier les deux membre par $X-1$ et on posant $X=1$

$$\left.\frac{X+1}{X^2+1}\right|_{X=1}=a \Rightarrow \boxed{a=1}$$

de même on multiplier par X^2+1 et on pose $X=i$ on trouve

qui $\quad \left.\dfrac{X+1}{X-1}\right|_{X=i}=bi+c \quad \Rightarrow \dfrac{i+1}{i-1}=bi+c$

$$\Rightarrow \frac{(i+1)(i+1)}{(i-1)(i+1)}=bi+c$$

$$\Rightarrow -i=bi+c$$

$$\Rightarrow b=-1 \text{ et } c=0$$

par conséquent $\quad F(X)=\dfrac{1}{X-1}-\dfrac{X}{X^2+1}.$