Examen : Algèbre 1 : SMPC
Correction

Année 2014 / 2015

Exercice 1 : soit $z = -\frac{3}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

1/ Calculer z^2 et en déduire une écriture exponentielle :

$$z^2 = \frac{9}{4}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{4}\left(2-\sqrt{2} - 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} - (2+\sqrt{2})\right)$$

$$= \frac{9}{4}\left(-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}\right)$$

$$= \frac{9}{4}\left(-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2}\right)$$

$$= \frac{9}{4}\left(-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i\right)$$

$$= +9\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

donc $\boxed{z^2 = 9e^{i5\pi/4}}$

2/ En déduire une forme exponentielle de z :

on a $z^2 = 9e^{i5\pi/4}$ donc $z = \sqrt{9}\, e^{i5\pi/8}$

par suite $\boxed{z = 3e^{i5\pi/8}}$

3/ Donner alors $\cos\frac{5\pi}{8}$ et $\sin\frac{5\pi}{8}$:

$$z = 3e^{i5\pi/8} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right) = 3\cos\frac{5\pi}{8} + i\,3\sin\frac{5\pi}{8}$$

et comme $z = -\frac{3}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\left(\frac{3}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

alors $3\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{3}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $3\sin\frac{5\pi}{8} = \frac{3}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

par conséquent $\boxed{\cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$ et $\boxed{\sin\frac{5\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

Exercice 2 : On considère l'équation (E) $z^3+(\sqrt{3}-i)z+(1-i\sqrt{3})z-i=0$

1/ (a) Déterminer le réel y tel que iy soit solution de (E)

iy est solution de (E) $\Rightarrow (iy)^3+(\sqrt{3}-i)(iy)^2+(1-i\sqrt{3})iy-i=0$

$\Rightarrow -iy^3-(\sqrt{3}-i)y^2+(1-i\sqrt{3})iy-i=0$

$\Rightarrow -\sqrt{3}y^2+\sqrt{3}y+i(-y^3+y^2+y-1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}y^2+\sqrt{3}y=0 \\ -y^3+y^2+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}y(y-1)=0 \\ -y^3+y^2+y-1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \text{ ou } y=1 \\ -y^3+y^2+y-1=0 \end{cases}$

Comme $y=0$ n'est pas solution de $-y^3+y^2+y-1=0$ et que 1 est solution de $-y^3+y^2+y-1=0$ alors i est solution de E

et donc $\boxed{y=1}$.

(b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z

$z^3+(\sqrt{3}-i)z^2+(1-i\sqrt{3})z-i=(z-i)(z^2+az+b)$

$=z^3+az^2+bz-iz^2-iaz-ib$

$=z^3+(a-i)z+(b-ia)z-ib$

ce qui implique que

$\begin{cases} \sqrt{3}-i=a-i \\ 1-i\sqrt{3}=b-ia \\ -i=-ib \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=1 \end{cases}$

2/ Résoudre l'équation (E) $z^3+(\sqrt{3}-i)z^2+(1-i\sqrt{3})-i=0$

on a $z^3+(\sqrt{3}-i)z^2+(1-i\sqrt{3})-i=(z-i)(z^2+\sqrt{3}z+1)=0$

donc $z=i$ ou $z^2+\sqrt{3}z+1=0$

$z^2+\sqrt{3}z+1$ à pour discriminant $D=-1=i^2$

donc : $z^2+\sqrt{3}z+1$ a pour solution $z_1=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et $z_2=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

par suite les solutions de l'équation (E) sont

$$S=\left\{ i\ ,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ ,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i \right\}$$

3/ Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère le point A d'affixe $z_A=i$, le point B d'affixe $z_B=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$ et C d'affixe z_C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses

(a) Déterminer z_C :

C est le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses

donc C a pour affixe $\bar{z}_B=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

donc $z_C=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

(b) Calculer les longueurs AB et BC

$$AB=|z_B-z_A|=\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}-i\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$$

et $BC=|z_C-z_B|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right|=|-i|=1$

donc $AB=BC$

par conséquent ABC est un triangle isocèle.

<u>Exercice 3</u> : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(-1,2)$ et $B(2,3)$

1/ Ecrire une équation cartesienne de la droite (AB) :

soit $M(x,y)$ un point de la droite (AB) donc $\vec{AB}$ et $\vec{AM}$ sont colinéaire donc

$$\det(\vec{AB},\vec{AM})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & x+1 \\ 1 & y-2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(y-2)-(x+1)=0$$

$\Leftrightarrow -x+3y-7=0$

$\Leftrightarrow x-3y+7=0$

donc l'equation cartesienne de (AB) est : $x-3y+7=0$

Déterminer la distance du point $C(1,-3)$ à la droite (AB) :

$$d(C, AB) = \frac{|1\times 1 - 3(-3)+7|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{17}{\sqrt{10}}$$

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) :

soit $H(x_H, y_H)$ le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB)

donc $\vec{CH}$ est orthogonal à (AB)

donc $\vec{CH}$ est colinéaire au vecteur normal à (AB) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

ce qui implique $\vec{CH} = \lambda\vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_H-1\\y_H+3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_H = \lambda+1 \\ y_H = -3\lambda-3 \end{cases}$$

or $H \in (AB)$ donc $x_H - 3y_H + 7 = 0$

$\Rightarrow \lambda+1-3(-3\lambda-3)+7=0$

$\Rightarrow 10\lambda + 17 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{17}{10}$

donc les coordonnées de H sont $H\begin{pmatrix}-7/10\\21/10\end{pmatrix}$

4) La distance du point C à la droite (AB) est égal à CH

donc

$$CH = \sqrt{\left(-\frac{7}{10}-1\right)^2+\left(\frac{21}{10}+3\right)^2} = \sqrt{\frac{2890}{100}} = \frac{17}{\sqrt{10}}$$

Scanned by CamScanner