Examen Algèbre 1 SMPC

Correction (Rattrapage 2014-2015

Exercice 1 : soit $z = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$,

1/ Calculer z^2 et en déduire une écriture exponentielle :

on a $z^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$

$$= \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 - 2i\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}} + \left(i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= 2-\sqrt{3} - 2i\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - (2+\sqrt{3})$$

$$= -2\sqrt{3} - 2i$$

donc $z^2 = -2\sqrt{3} - 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$$= 4e^{i7\pi/6}$$

2/ En déduire une forme exponentielle de z :

on a $z^2 = 4e^{i7\pi/6}$

donc $z = \sqrt{4}\,e^{i7\pi/12}$

$$= 2e^{i7\pi/12}$$

3/ on a $e^{i\frac{19\pi}{12}} = e^{i\left(\pi + 7\pi/12\right)} = e^{i\pi}e^{i7\pi/12}$

or $e^{i\pi} = -1$ donc $e^{i\frac{19\pi}{12}} = -e^{i7\pi/12}$

et comme on a trouver que $e^{i7\pi/12} = \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$

donc $e^{i\frac{19\pi}{12}} = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$

donc $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

ce qui implique que $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

et $\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Exercice 2 : On considère l'équation (E) : $iz^2 - 2z + 4i + 12 = 0$

1/ Déterminer $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = 5-12i$:

$\delta = x+iy \Rightarrow \delta^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$

donc $\delta^2 = 5-12i$ implique que $x^2-y^2=5$ et $2xy=-12$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=-6 \end{cases}$ implique $\begin{cases} x^4-x^2y^2=5x^2 \\ xy=-6 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x^4-36=5x^2 \\ xy=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4-5x^2-36=0 \\ xy=-6 \end{cases}$

si on pose $X=x^2$, on résoud l'équation $X^2-5X-36=0$

son discriminant $\Delta = (-5)^2-4(-36) = 169 = (13)^2$

donc $\sqrt{\Delta} = \pm 13$

donc l'équation $X^2-5X-36=0$ a deux racines réels

$X_1 = \frac{X+13}{2} = 9$ et $X_2 = \frac{X-13}{2} = -4$

puisqu'on a posé $X=x^2$ et $x \in \mathbb{R}$ donc forcément on a

$x^2=9$ et donc $x=3$ ou $x=-3$

par suite la solution du système $\begin{cases} x^4-5x^2-36=0 \\ xy=-6 \end{cases}$

soit $(x=3$ et $y=-2)$ ou bien $(x=-3$ et $y=2)$.

par conséquent $\delta = 3-2i$ ou $\delta = -3+2i$

2/ Résoudre l'équation (E) :

l'équation $iz^2-2z+4i+12=0$ a pour discriminant

$$\begin{aligned} \Delta = (-2)^2-4(4i+12)i &= 4-16i^2-48i \\ &= 4+16-48i \\ &= 20-48i \\ &= \\ &= 4(5-12i) \end{aligned}$$

or $5-12i = \delta^2$ donc $\Delta = 4\delta^2 = (2\delta)^2$

donc les solutions de l'équation (E) sont $z_1 = \frac{2+2\delta}{2i}$ et $z_2 = \frac{2-2\delta}{2i}$

donc $z_1 = \frac{2+2(3-2i)}{2i} = \frac{8-4i}{2i} = \frac{8i+4}{-2} = -2-4i$

et $z_2 = \frac{2-2(3-2i)}{2i} = \frac{-4+4i}{2i} = \frac{-4i-4}{-2} = 2+2i$

par conséquent les solutions de l'équation (E) sont

$z_1 = -2-4i$ et $z_2 = 2+2i$

Exercice 3 : On considère $P(z) = 3z^3 - (4+6i)z^2 + (2+8i)z - 4i$

1/ Vérifier que $P(2i) = 0$:

on a $P(2i) = 3(2i)^3 - (4+6i)(2i)^2 + (2+8i)(2i) - 4i$

$= -24i + 4(4+6i) + (4i-16) - 4i$

$= -24i + 16 + 24i + 4i - 16 - 4i$

$= 0$

2/ Déterminer les réels a, b et c tels que $3z^3 - (4+6i)z^2 + (2+8i)z - 4i = (z-2i)(az^2+bz+c)$:

on a $(z-2i)(az^2+bz+c) = az^3 + bz^2 + cz - 2aiz^2 - 2biz - 2ci$

$= az^3 + (b-2ai)z^2 + (c-2bi)z - 2ci$

donc $3z^3 - (4+6i)z^2 + (2+8i)z - 4i = (z-2i)(az^2+bz+c)$ implique

que $\begin{cases} a = 3 \\ b - 2ai = -4-6i \\ c - 2bi = 2+8i \\ -2ci = -4i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = 2 \\ b = -4 \end{cases}$

et donc les réels a, b et c tels que $3z^3-(4+6i)z^2+(2+8i)z-4i = (z-2i)(az^2+bz$

sont $a = 3$, $b = -4$ et $c = 2$.

3/ Résoudre l'équation $3z^2 - 4z + 2 = 0$:

on a $3z^2 - 4z + 2 = 0$ a pour discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -8$

$= 8i^2 = (2\sqrt{2}i)^2$

donc $\sqrt{\Delta} = \pm 2\sqrt{2}i$

et les solutions de l'équation $3z^2 - 4z + 2 = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{4 + 2\sqrt{2}i}{6} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

et $$z_2 = \frac{4 - 2\sqrt{2}i}{6} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$$

4) En déduire les solution de l'équation $P(z) = 0$:

$3z^3 - (4+6i)z^2 + (2+8i)z - 4i = 0$

$\ldots) = 0$ implique que $(z - 2i)(3z^2 - 4z + 2) = 0$

$P(z) = 0 \iff (z - 2i)(3z^2 - 4z + 2) = 0$

$\iff z = 2i$ ou $3z^2 - 4z + 2 = 0$

$\iff z = 2i$ ou $z = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$ ou $z = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$

et par conséquent les solution de l'équation $P(z) = 0$ sont :

$2i$, $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}i$ et $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$.

Exercice 4 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère le point $A(1, 1)$ et la droite

$$L \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Donner une équation de la droite D passant par l'origine et parallèle à la droite D :

La droite D est parallèle à la droite D, donc les droites D et D ont le même vecteur directeur, or le vecteur directeur de la droite D est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ donc c'est aussi vecteur directeur de D et puisque $O \in D$

soit $M(x, y)$ un point de la droite D et on a $\vec{OM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaire ce qui implique que ...