$P(-1) = Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7$

$-1 - 3 - 3 + 7$

SMPC

Université Hassan II Casablanca

Examen : Algèbre 1 (Session de Rattrapage)

Année: *2016/2017*

Exercice 1 (7 points)

Pour tout nombre complexe z, on pose

$$P(Z) = Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7$$

1. Calculer $P(-1)$. (0,5 pts)
2. Déterminer les réels a, b tels que $P(Z) = (Z+1)(Z^2 + aZ + b)$, $\forall Z \in \mathbb{C}$. (1 pts)
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z) = 0$. (1,5 pts)

   le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par A, B, C et D les points du plan d'affixes respectives $Z_A = -1$, $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$, $Z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $Z_D = 3$.

4. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC. (2 pts)
5. Donner un argument du nombre complexe $\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_C}$. (1 pts)
6. En déduire la nature du triangle ADC. (1 pts)

Exercice 3 (5.5 points)

On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0$

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle $\mathcal{C}$. (1 pts)
2. On considère le point $A(2; 3)$.
   a) Calculer la distance ΩA. (0.5 pts)
   b) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre $[\Omega A]$. (1 pts)
   c) Démontrer que les deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ se rencontrent en deux points M_1 et M_2. (1 pts)
   d) Déterminer les coordonnées des points M_1 et M_2. (*Facultative* 2 pts)
   c) Montrer que les droites (AM_1) et (AM_2) sont les tangentes à $\mathcal{C}$. (2 pts)

Exercice 3 (7,5 points)

On considère le polynôme $P(X) = X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 6X + 2$.

1. Montrer que 1 est une racine double de P. (0.5+1 pts)
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, montrer que si α est une racine de P alors $\overline{\alpha}$ est une racine de P. (1 pts)
3. Vérifier que $1 - i$ est une racine de P. (0.5 pts)
4. En déduire que $1 + i$ est une racine de P. (0.5 pts)
5. Décomposer le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$. (1 pts)
6. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$. (1 pts)
7. Décomposer la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{X^2}{P(X)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$. (2 pts)