SMPC

Université Hassan II Casablanca

Année: ***2015/2016***

Examen : Algèbre 1 (Session de Rattrapage)

Exercice 1

On considère le polynôme $P = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$

1. Montrer que 3 est une racine double de P.
2. Factoriser P sur $\mathbb{R}[X]$.
3. En déduire toutes les racines de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2

Soit $P(z) = z^3 - 4(1+i)z^2 - 2(1-4i)z + 12$

1. Vérifier que $P(2) = 0$.
2. Ecrire $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$, où a et b sont des nombres complexes à déterminer.
3. Résoudre (E) : $z^2 - 2(1+2i)z - 6 = 0$

Soit z_1 et z_2 les solutions de E, z_1 ayant une partie réelle négative.

4. Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.
5. Vérifier que $\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^4 = 81$
6. Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_0 = 2$, $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = 3(1+i)$.
   Calculer AB, AC puis $\widehat{BAC}$; en déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 3

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives:

$$(P) : x - 2y - 2z = 0 \qquad (Q) : 2x + 2y - z = 0$$

1. Montrer que (P) et (Q) se coupent selon une droite (Δ).
2. Donner un vecteur directeur de (Δ).
3. En déduire une équation cartésienne du plan (R) passant par $A(1, -5, 1)$ et orthogonal à (P) et à (Q).

Soit (D) la droite passant par $B(1, 0, -1)$ et parallèle à (Δ).

4. Donner une équation paramétrique de (D).
5. Vérifier que $d(M, P) = d(M, Q)$ pour tout point M sur (D).