

Exercice 1

Soit $P(z) = z^3 + (3 - \sqrt{3})z^2 + (6 - 2\sqrt{3})z + 4 - 4\sqrt{3}$

1. Vérifier que $P(\sqrt{3} - 1) = 0$.
2. Résoudre l'équation $P(z) = 0$.
3. Ecrire les solutions sous la forme trigonométrique.
Dans le plan complexe on considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} - 1$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$
4. Calculer AB , AC et \widehat{BAC} ; en déduire la nature du triangle ABC .
5. Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_B}$ puis un argument de $\frac{z_B - z_A}{z_B}$
6. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$

Exercice 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $A(2; -4)$ et $B(-3; -4)$

1. Ecrire une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et dirigée par \vec{i}
2. Montrer que l'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ représente un cercle C dont on déterminera le centre et le rayon.
3. Montrer que la droite (D) est tangente au cercle C .
4. Déterminer une équation de la deuxième droite (Δ) passant par B et tangente au cercle.

Exercice 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-3, 0, 0)$, $B(-1, 0, -1)$, $C(-1, 1, 0)$ et $\Omega(1, -1, 0)$

1. (a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
(b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
2. (a) Donner une équation cartésienne de la sphère S de centre Ω et de rayon 2
(b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère S .
3. Soit (Q) le plan d'équation $2x + 2y + z + 3 = 0$
 - (a) Montrer que les plans (ABC) et (Q) sont orthogonaux .
 - (b) Donner la nature de l'intersection du plan (Q) et la sphère (S) .
 - (c) Donner une équation paramétrique de la droite (D) passant par Ω et perpendiculaire à (Q) .
 - (d) Donner les éléments caractéristiques de l'intersection de (Q) et (S) .

Exercice 4

1. Factoriser le polynôme $P = X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X+1}{(X-1)(X^2+1)}$