Examen corrigé 2016-17 (1)

Ex1

$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$

$P(2) = 2^3 + 2(\sqrt{2}-1).2^2 + 4(1-\sqrt{2}).2 - 8$

$= 8 + 8\sqrt{2} - 8 + 8 - 8\sqrt{2} - 8$

$= 0$

$P(2) = 0 \Rightarrow 2$ est une racine de P donc $P(z)$ est divisible par $z-2$.

$$\begin{array}{l|l} z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8 & z-2 \\ \hline 0 \quad 2\sqrt{2}z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8 & z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 \\ \quad 0 \quad + 4z - 8 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Donc $P(z) = (z-2)\underbrace{(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)}_{\Delta = -8 < 0}$

Donc $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

2) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$

$\Delta = -8 = (2\sqrt{2}i)^2$

$z_2 = \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i}{2} = -\sqrt{2}(1+i)$

$z_1 = \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}(-1+i)$

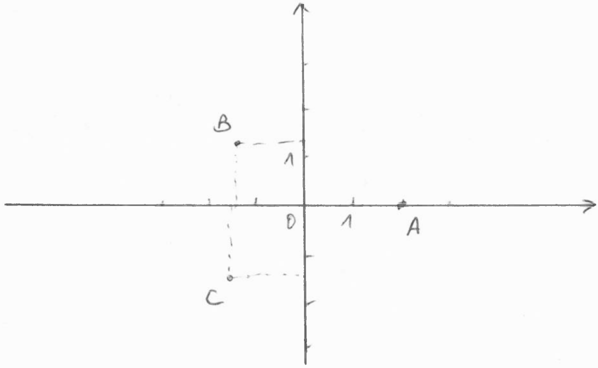
Les racines de P sont : z_1, z_2 et 2.

3) $z_1 = \sqrt{2}(-1+i)$

$|z_1| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$ alors $z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$\arg z_1 = \frac{3\pi}{4}$



) I milieu de [AB] donc $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

) $OA = |z_A| = 2$ $\qquad$ $OB = |z_B| = |z_1| = 2$ donc OAB est isocèle en O

) OAB isocèle en O et I milieu de [AB] donc [OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB} = (\widehat{\vec{i}, \vec{OB}}) = \arg(z_1)$

donc $(\widehat{\vec{i}, \vec{OI}}) = \dfrac{1}{2}\arg(z_1) = \dfrac{3\pi}{8}$

) $(\widehat{\vec{i}, \vec{OI}}) = \arg(z_I)$

$$|z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

d'où $$z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

Ex2

$P = X^2 + X + 1 \qquad Q = X$

$\Delta = -3 < 0$ donc P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

$$X^2 + X + 1 = \frac{X^3 - 1}{X - 1}$$

$\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = 1$ donc $\dfrac{\left(e^{i2\pi/3}\right)^3 - 1}{e^{i2\pi/3} - 1} = 0$ alors $e^{i2\pi/3}$ est racine de P

Comme $P \in \mathbb{R}[X]$ et $e^{i2\pi/3}$ est une racine complexe de P, alors $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ est aussi racine complexe de P

D'où $P = \left(X - e^{i2\pi/3}\right)\left(X - e^{-2i\pi/3}\right)$ dans $\mathbb{C}[X]$

On a $X^2 + X + 1 = X(X+1) + 1$ division euclidienne de P par Q

alors 1 est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide donc $P \wedge Q = 1$

$1P - (X+1)Q = 1$ donc $U = 1$ et $V = X+1$

$$F(X) = \frac{1}{X(X^2+X+1)}$$

1ère méthode : $F(X) = \dfrac{X^2+X+1-(X+1)X}{X(X^2+X+1)}$

$$= \frac{1}{X} - \frac{X+1}{X^2+X+1}$$

2ème méthode : $F(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{bX+c}{X^2+X+1}$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$XF(X)\Big]_{X=0} = a + X\dfrac{bX+c}{X^2+X+1}\Big]_{X=0}$ d'où $a = 1$

$\lim\limits_{X \to +\infty} XF(X) = a + b = 0$ donc $b = -1$

$F(1) = \frac{1}{3} = a + \frac{b+c}{3}$ d'où $c = -1$